



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

- + *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.
- + *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.
- + *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.
- + *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

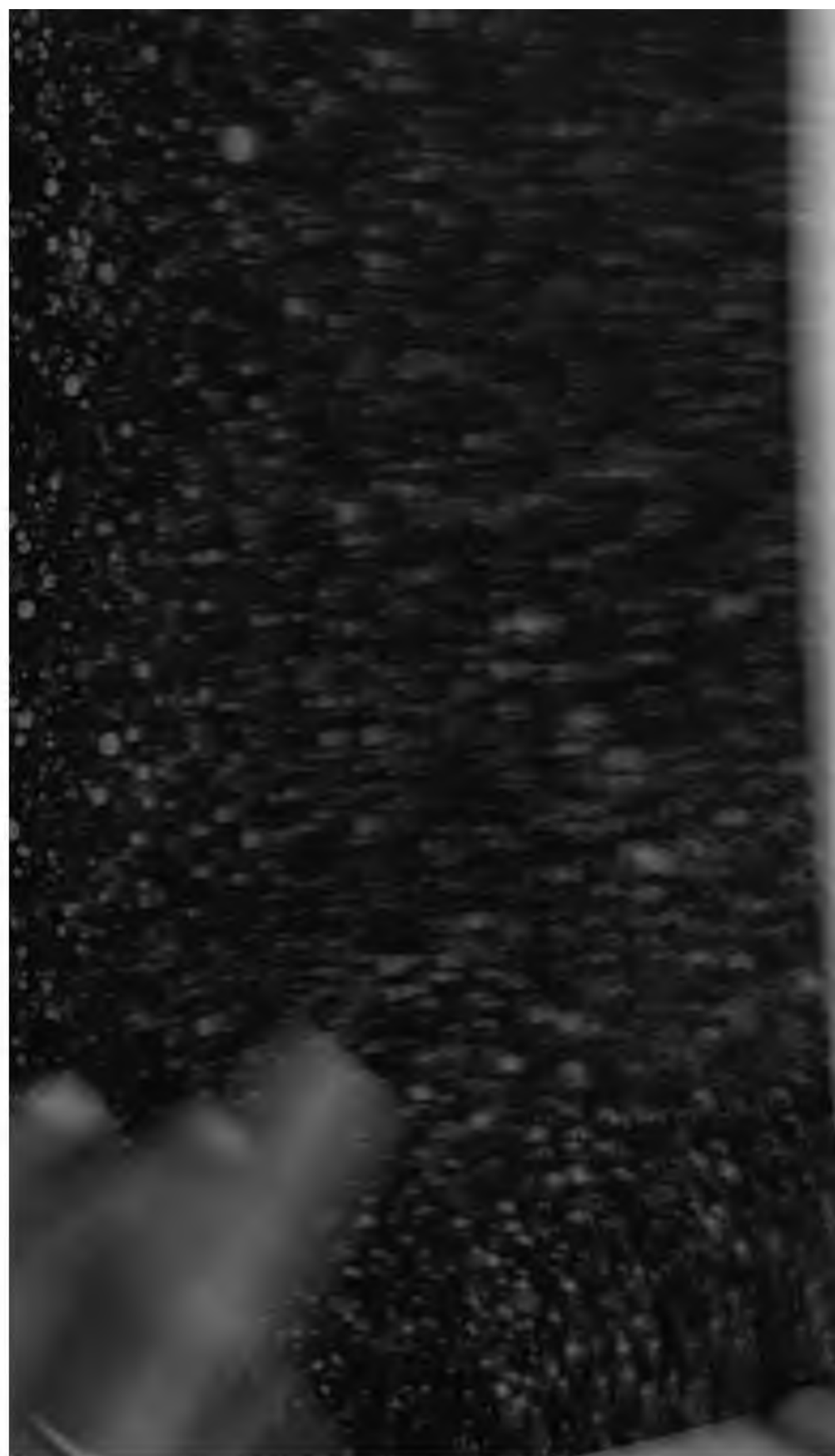
En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse <http://books.google.com>

Stanford University Libraries



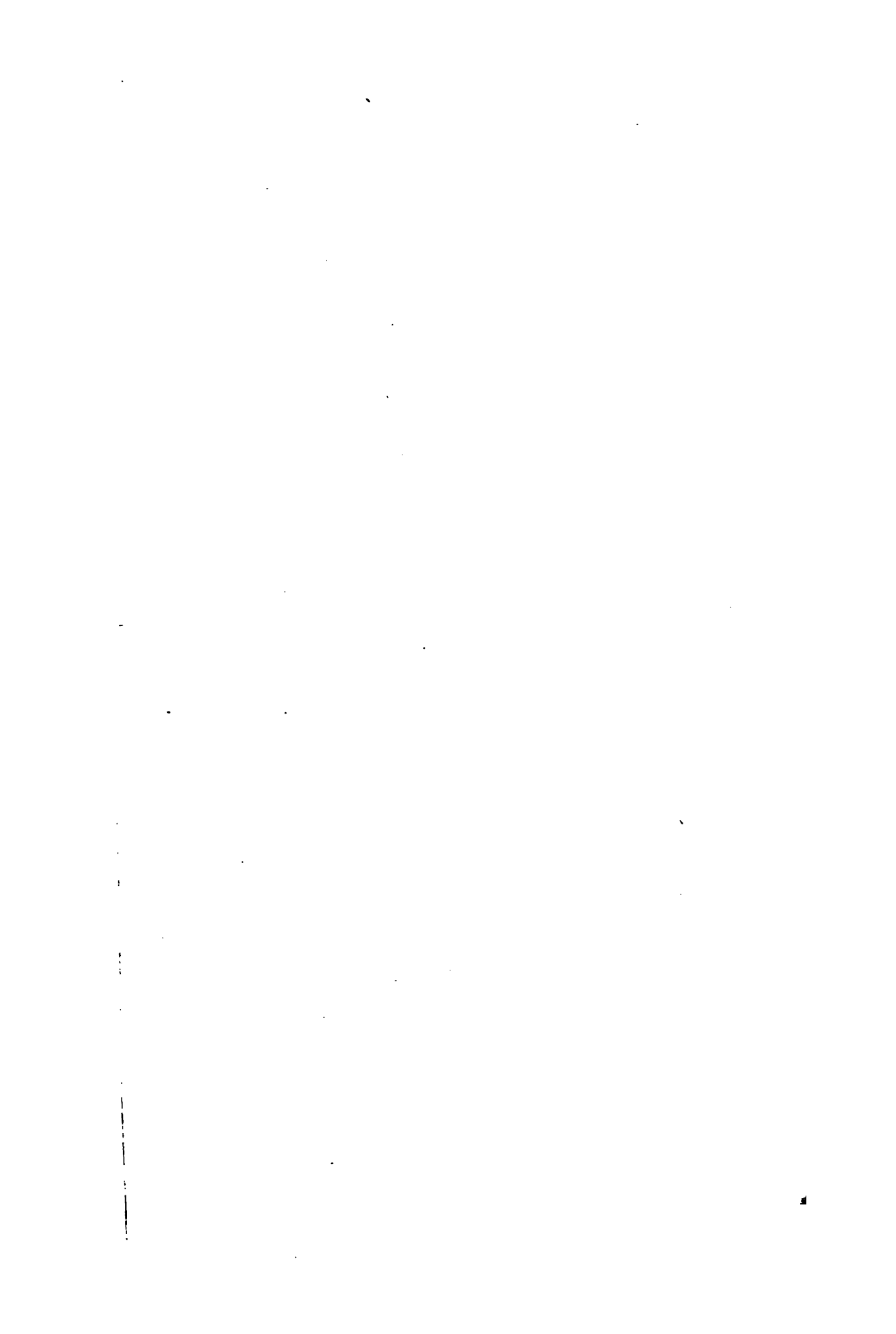
3 6105 001 061 253





6





4. 4. 1111
44873
Publication trimestrielle.

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE

PARIS
PAR LES SECRÉTAIRES.

S'adresser pour la rédaction, à M. BOUT, rue Toulon, 7;
pour la distribution, à M. BRYEN, rue Claude-Bernard, 85.

TOME XXVIII. — FASCICULE I.

PARIS,
AU SIEGE DE LA SOCIÉTÉ,
7, RUE DES GRANDS-AUGUSTINS, 7.

MM. les Membres de la Société sont priés d'adresser leur contribution à M. Claude-Lafontaine, banquier, rue de Trévise, n° 33, à Paris, Trésorier de la Société.

On s'abonne et on trouve les Volumes déjà publiés au siège de la Société et à la Librairie Gauthier-Villars, 55, quai des Grands-Augustins, Paris.

Les séances de la Société mathématique ont lieu les premier et troisième mercredis de chaque mois à 8 heures et demie.

Jours d'ouverture de la Bibliothèque : lundi, mercredi, vendredi, de 11 à 5 heures.

Depuis le 1^{er} Mars 1900 les séances de la Société ont lieu dans une salle de la Faculté des Sciences (entrée place de la Sorbonne, escalier tout au bout de la galerie, deuxième étage à droite).

La Bibliothèque reste provisoirement, 3, rue des Grands-Augustins. La correspondance doit être adressée, soit 7, rue des Grands-Augustins, soit au domicile particulier de l'un des Secrétaires.

AVIS.

Dans sa séance du 2 février 1883, le Conseil de la Société mathématique de France a décidé qu'à l'avenir tout Membre de la Société qui voudra compléter sa collection du *Bulletin* aura le droit personnel de le faire, une seule fois pour chacun des volumes publiés avant son admission, aux prix suivants :

	Le volume.
Dix volumes ou moins.....	4,00
De cinq à neuf volumes.....	5,00
Moins de cinq volumes.....	6,00

Dans sa séance du 28 février 1900, le Conseil de la Société mathématique de France a décidé qu'à l'avenir tout Membre de la Société, auteur d'un travail quelconque inséré dans le *Bulletin* et désirant en obtenir des tirages à part, **devra en faire la demande en retournant l'épreuve corrigée.**

Si le nombre demandé ne dépasse pas cinquante, les frais du tirage à part seront faits par la Société.

Conformément à des décisions prises par le Conseil et par la Commission d'impression :

1^o Le *Bulletin*, depuis le Tome XXVII, paraît tous les trois mois.

2^o Les auteurs de tous travaux destinés au *Bulletin* sont instamment priés d'inscrire en tête de leurs manuscrits la classification que leur assigne, d'après le sujet traité, l'*Index du Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques*.

3^o Ils sont également invités à ne pas dépasser, autant que possible, la proportion de une figure pour quatre pages de texte imprimé.



BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE.

38162 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins 35.



BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE,

PUBLIÉ
PAR LES SECRÉTAIRES.

TOME VINGT-HUITIÈME. — ANNÉE 1900.

PARIS,
AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ,
7, RUE DES GRANDS-AUGUSTINS, 7.

1900



Q 60448

ÉTAT

DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

AU COMMENCEMENT DE L'ANNÉE 1900 ⁽¹⁾.

Membres honoraires du Bureau....	{	MM. APPELL. BERTRAND. CREMONA. DARBOUX. HATON DE LA GOUPILLIÈRE. HERMITE. JORDAN. PICARD.
----------------------------------	---	--

Président.....	MM.	POINCARÉ.
Vice-Présidents	{	CARVALLO. D'OCAGNE. RAFFY. VICAIRE.
Secrétaires	{	BLUTEL. BOREL.
Vice-Secrétaires.....	{	BRICARD. DUPORCQ.
Archiviste.....		BIOCHE.
Trésorier.....		CLAUDE-LAFONTAINE.
Membres du Conseil ⁽²⁾	{	ANDOYER, 1903. ANDRÉ, 1903. FOURET, 1903. GOURSAT, 1901. GUYOU, 1903. HUMBERT, 1901. LAISANT, 1901. LECORNU, 1902. LUCAS (F.), 1902. KOENIGS, 1901. PAINLEVÉ, 1902. TOUCHE, 1902.

⁽¹⁾ MM. les Membres de la Société sont instamment priés d'adresser au Secrétariat les rectifications qu'il y aurait lieu de faire à cette liste.

⁽²⁾ La date qui suit le nom d'un membre du Conseil indique l'année au commencement de laquelle expire le mandat de ce membre.

Date
de
l'admission.

1872. **ACHARD**, ancien directeur de la Compagnie d'assurances sur la vie *la Foncière*, rue de la Terrasse, 6 *bis*, à Paris.
1893. **ADAM** (Paul), ingénieur des ponts et chaussées, docteur ès sciences mathématiques, boulevard des Invalides, 40, à Paris.
1900. **ADHÉMAR** (vicomte Robert d'), 140, boulevard Raspail.
1881. **AMIGUES**, proviseur du lycée, à Toulon (Var).
1896. **ANDOYER**, maître de conférences et chargé de cours à la Faculté des Sciences, avenue d'Orléans, 5, à Paris.
1894. **ANDRADE**, maître de conférences à la Faculté des Sciences, à Montpellier (Hérault).
1872. **ANDRÉ** (Désiré), docteur ès sciences mathématiques, rue Bonaparte, 70 *bis*, à Paris.
1890. **ANTOMARI**, docteur ès sciences, professeur au lycée Carnot, rue Daubigny, 11 *bis*.
1879. **APPELL**, membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences et à l'École Centrale des Arts et Manufactures, rue de Noailles, 23, à St-Germain-en-Laye (S.-et-O.).
1881. **ASTOR**, professeur à la Faculté des Sciences, place Vaucanson, 4, à Grenoble (Isère).
1882. **AUTONNE**, ingénieur des ponts et chaussées, rue Mont-Bernard, 9, à Lyon (Rhône).
1900. **BAIRE**, docteur ès sciences, professeur au lycée de Bar-le-Duc.
1896. **BAKER**, professeur à l'Université, Toronto (Canada).
1894. **BALITRAND**, capitaine du génie, à Tlemcen (Algérie).
1889. **BEGHIN**, ancien élève de l'École Polytechnique, rue de Bourgogne, 40, à Paris.
1875. **BERDELLÉ**, ancien garde général des forêts, à Rioz (Haute-Saône).
1873. **BERTRAND** (Joseph), secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, membre de l'Académie française, rue de Tournon, 4, à Paris.
1895. **BEUDON**, docteur ès sciences, professeur au lycée, rue Dupuch, 26, à Alger (Algérie).
1872. **BIENAYMÉ** (Arthur), inspecteur général du génie maritime en retraite, rue Revel, 14, à Toulon (Var).
1888. **BIOCHE**, professeur au lycée Louis-le-Grand, rue Notre-Dame-des-Champs, 56, à Paris.
1875. **BISCHOFFSHEIM**, membre de l'Institut, rue Taitbout, 3, à Paris.
1898. **BLAKE** (Edwin-M.), Instructor at Purdue-University, à Lafayette (Indiana).
1900. **BLUMENTHAL** (Otto), docteur en philosophie de Göttingen, rue Berthollet, 5, à Paris.
1891. **BLUTEL**, professeur au lycée Saint-Louis, maître de conférences à la Sorbonne, rue Claude-Bernard, 65, à Paris.
1892. **BONAPARTE** (prince Roland), avenue d'Iéna, 10, à Paris.
1895. **BOREL**, maître de conférences à l'École Normale supérieure, rue Toullier, 7, à Paris.
1896. **BOULANGER**, professeur à l'Institut industriel, rue Caumartin, 80, à Lille (Nord).
1896. **BOURGET** (Henry), maître de conférences à la Faculté des Sciences, rue Saint-Jacques, 20, à Toulouse (Haute-Garonne).
1896. **BOURLET**, professeur à l'École des Beaux-Arts et au lycée Saint-Louis, avenue de l'Observatoire, 22, à Paris.
1886. **BRAULT DE BOURNONVILLE**, avenue de la Grande-Armée, 79, à Paris.
1900. **BREITLING**, proviseur du lycée Saint-Louis, boulevard Saint-Michel, 44.
1897. **BRICARD**, ingénieur des manufactures de l'État, répétiteur à l'École Polytechnique, rue des Martyrs, 72, à Paris.
1873. **BROCARD**, chef de bataillon du génie en retraite, Ville-Haute, 75, à Bar-le-Duc.
1886. **BRUNEL**, doyen de la Faculté des Sciences, à Bordeaux (Gironde).
1893. **BURKHARDT**, professeur à l'Université, Kreuzplatz, 1, à Zürich (Suisse).

Date
de
l'admission.

1897. CABREIRA, membre de l'Académie royale des Sciences, rua da Alegria, 36, à Lisbonne.
1894. CAHEN, professeur au collège Rollin, rue des Vignes, 39, à Paris.
1893. CALDARERA, professeur à l'Université, palazzo Giampaolo, via della Libertà, à Palerme.
1888. CANET (Gustave), ingénieur civil, directeur de l'artillerie de MM. Schneider et C^{ie}, boulevard Malesherbes, 1, à Paris.
1885. CARON, professeur de géométrie descriptive, rue Claude-Bernard, 69, à Paris.
1892. CARONNET, docteur ès sciences mathématiques, rue Demours, 62 *bis*, à Paris.
1896. CARTAN, maître de conférences à la Faculté des Sciences, rue Suchet, 38, à Lyon.
1887. CARVALLO, répétiteur et examinateur d'admission à l'École Polytechnique, rue Clovis, 1, à Paris.
1887. CASPARY (F.), Joachimsthalerstrasse, 43, à Charlottenburg (Allemagne).
1890. CEDERCREUTZ (baronne Nanny, née de Lagerborg), Georgsgatan, 22, à Helsingfors.
1892. CELLÉRIER (Gustave), quai des Eaux-Vives, 34, à Genève (Suisse).
1896. CELS, professeur au lycée Condorcet, rue Le Goff, 3, à Paris.
1887. CERRUTI, professeur à l'Université, rue d'Azeglio, 16, à Rome (Italie).
1888. CHAILAN (Édouard), rue Berthollet, 16, à Paris.
1893. CHARLIAT, ingénieur des arts et manufactures, rue de Paradis, 46, à Paris.
1896. CHARVE, professeur à la Faculté des Sciences, cours Pierre-Puget, 60, à Marseille.
1881. CHEMIN, ingénieur en chef des ponts et chaussées, avenue Montaigne, 33, à Paris.
1884. CHRYSTAL, professeur à l'Université, à Édimbourg (Écosse).
1875. CLAUDE-LAFONTAINE, banquier, rue de Trévise, 32, à Paris.
1872. COLLIGNON, inspecteur général des ponts et chaussées, rue de Seine, 6, à Paris.
1890. COLOT, château du Seuil, à Cérons (Gironde).
1898. COMBÉRIAC, capitaine du génie, à l'École d'Application, à Fontainebleau (S.-et-M.).
1896. COSSERAT (E.), professeur à la Faculté des Sciences, rue de Metz, 1, à Toulouse.
1896. COSSERAT (F.), ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, rue d'Alsace, 23, à Paris.
1900. COTTON (Émile), professeur au lycée, rue Pargaminières, 52, à Toulouse.
1896. COURTIN, chef de bataillon du génie en retraite, rue des Bernardins, 48, à Paris.
1884. CRAIG, professeur à l'Université John Hopkins, à Baltimore (États-Unis d'Amérique).
1877. CREMONA, sénateur, directeur de l'École des Ingénieurs, à Rome (Italie).
1872. DARBOUX, membre de l'Institut, doyen de la Faculté des Sciences, rue Gay-Lussac, 36.
1885. DAUTHVILLE, professeur à la Faculté des Sciences, à Montpellier (Hérault).
1881. DEFFORGES, lieutenant-colonel d'infanterie, en mission à Constantinople (Turquie).
1882. DELANNOY, sous-intendant militaire en retraite, à Guéret (Creuse).
1895. DELAUNAY (N.), professeur à l'Institut Polytechnique Empereur Nicolas II, à Varsovie.
1899. DELENER, ingénieur des ponts et chaussées, à Aubenas (Ardèche).
1885. DENARTRES, doyen de la Faculté des Sciences, à Lille (Nord).
1892. DEMOULIN (Alp.), professeur à l'Université, rue du Bas-Polder, 20, à Gand (Belgique).
1897. DENIS (Henry), élève libre à l'École d'application du Génie maritime, rue de Fleury, 23, à Paris.
1883. DERUYTS, professeur à l'Université, rue des Augustins, 35, à Liège (Belgique).
1894. DESAINT, docteur ès sciences, boulevard Gouvion-Saint-Cyr, 47, à Paris.
1899. DRACH (Jules), maître de conférences à la Faculté des Sciences, à Clermont-Ferrand.
1896. DUMAS (G.), licencié ès sciences, chez Frau Müller, 25, Kaiserstrasse Postel 1, Berlin, N. O.

Date
de
l'admission.

1897. **DUMONT**, professeur au lycée, rue Royale, 10, à Annecy (Haute-Savoie).
1886. **DUNCAN**, Consulting Engineer, Empire Building, Broadway, 71, New-York City.
1895. **DUPORCQ** (Ernest), ingénieur des télégraphes, boulevard Pereire, 162, à Paris.
1896. **DUPORT** (Henry), professeur à l'Université, rue Colonel-de-Grancey, 4, à Dijon.
1897. **DURAN-LORIGA**, commandant d'artillerie, à la Corogne (Espagne).
1872. **DURRANDE**, doyen de la Faculté des Sciences, à Poitiers (Vienne).
1885. **DYCK** (Walther), professeur au Polytechnicum, à Munich (Bavière).
1896. **EUVERTE**, ancien élève de l'École Polytechnique, ancien capitaine d'artillerie, rue de Seine, 6, à Paris.
1888. **FABRY**, professeur à la Faculté des Sciences, à Montpellier (Hérault).
1891. **FAUQUENBERGUE**, professeur au lycée, à Mont-de-Marsan (Landes).
1898. **FEBBER**, capitaine d'artillerie, professeur adjoint à l'École d'application, rue d'Avon, 17, à Fontainebleau (Seine-et-Marne).
1892. **FERR** (Henri), privat-docent à l'Université, rue Gevray, 19, à Genève (Suisse).
1885. **FIELDS** (John), professeur de mathématiques, Niornbergerstrasse, 18, à Berlin.
1881. **FLOQUET**, professeur à la Faculté des Sciences, rue Saint-Lambert, 17, à Nancy.
1872. **FLYE SAINTE-MARIE**, chef d'escadron d'artillerie en retraite, ancien répétiteur à l'École Polytechnique, place Royer-Collard, à Vitry-le-François (Marne).
1896. **FONTANEAU**, ancien officier de marine, cours Rugeaud, 8, à Limoges (Haute-Vienne).
1897. **FORTE NÉ**, professeur au collège Rollin, boulevard Barbès, 21 bis, à Paris.
1895. **FONTÈS**, ingénieur en chef des ponts et chaussées, rue Romiguières, 3, à Toulouse.
1891. **FONTVIOLANT** (DE), professeur à l'École Centrale, rue d'Erlanger, 29, Paris-Auteuil.
1889. **FOUCHÉ**, professeur de mathématiques, rue Soufflot, 5, à Paris.
1872. **FOURET**, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, rue Washington, 16.
1892. **FROLOV** (le général), quai des Eaux-Vives, 36, à Genève (Suisse).
1872. **GARIEL**, ingénieur en chef des ponts et chaussées, professeur à la Faculté de Médecine, rue Édouard-Detaille, 6, à Paris.
1896. **GAUTHIER-VILLARS**, ancien élève de l'École Polytechnique, éditeur, quai des Grands-Augustins, 55, à Paris.
1890. **GERBIA**, professeur libre à l'Université, à Palerme (Italie).
1872. **GENTY** (E.), ingénieur en chef des ponts et chaussées, rue de Vaugirard, 207, à Paris.
1890. **GENTY** (Max), lieutenant de vaisseau, directeur du Parc d'aérostation de Lagoubran, villa Emeriau, à Toulon.
1890. **GERBALDI**, professeur à l'Université, via Daita, 11, à Palerme (Italie).
1897. **GERRANS**, professeur à Worcester College, Saint-John Street, 20, à Oxford (Grande-Bretagne).
1896. **GIRARDVILLE**, capitaine d'artillerie, avenue Marigny, 133, à Montreuil-sous-Bois (Seine).
1881. **GOURSAT**, professeur à la Faculté des Sciences, répétiteur à l'École Polytechnique, boulevard Arago, 112, à Paris.
1896. **GREENHILL**, professeur à l'École d'artillerie, à Woolwich (Grande-Bretagne).
1896. **GRÉVY**, professeur au lycée Saint-Louis, boulevard Saint-Germain, 13, à Paris.
1899. **GUADET**, ancien élève de l'École Polytechnique, boulevard Saint-Germain, 240 bis, à Paris.
1880. **GUCCIA** (Jean), professeur à l'Université, via Ruggiero Settimo, 28, à Palerme (Italie).
1900. **GUICHARD**, professeur à l'Université de Clermont-Ferrand.

Date
de
l'admission.

1891. GUINAWAES, officier du génie, à l'Académie des Sciences, rue Nova da Piedade, 55, à Lisbonne (Portugal).
1881. GUNTHER (Dr Sigismond), professeur à l'École Polytechnique, à Munich (Bavière).
1885. GUYOU, membre de l'Institut, capitaine de frégate, rue de l'Université, 13, à Paris.
1873. HAAK, ingénieur en chef des ponts et chaussées, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Chardin, 11 bis, à Paris.
1882. HABICH, directeur de l'École des mines, à Lima (Pérou).
1896. HADANARD, professeur adjoint à la Faculté des Sciences, professeur suppléant au Collège de France, rue Humboldt, 25, à Paris.
1894. HALSTED, professeur à l'Université du Texas, Guadalupe Street, 2407, à Austin (Texas).
1872. HATON DE LA GOUPILLIÈRE, membre de l'Institut, inspecteur général des mines, directeur de l'École des mines, boulevard Saint-Michel, 60, à Paris.
1872. HENRY, inspecteur général des ponts et chaussées, boulevard St-Germain, 22, à Paris.
1892. HERMANN, libraire-éditeur, rue de la Sorbonne, 8, à Paris.
1873. HERMITE, membre de l'Institut, professeur honoraire à la Faculté des Sciences, rue de la Sorbonne, 2, à Paris.
1893. HIOUX, professeur en retraite, rue des Fossés-Saint-Jacques, 16, à Paris.
1900. HOFFBAUER, ancien lieutenant d'artillerie, rue Malus, 1, à Paris.
1879. HOLST(Elling), professeur à l'École Polytechnique, Pilestrade, 49, à Christiania (Norvège).
1895. HOTT (Stanislas), professeur à l'École St^e-Geneviève, rue Vauquelin, 30, à Paris.
1872. HOUBICANT, chef de bataillon du génie en retraite, rue Lecourbe, 88, à Paris.
1880. HUMBERT, ingénieur en chef des mines, professeur à l'École Polytechnique, rue Daubigny, 10, à Paris.
1881. IMBER, directeur des études à l'École Centrale, rue Montgolfier, 1, à Paris.
1887. ISSALY (l'abbé), rue Margaux, 16, à Bordeaux (Gironde).
1896. JACQUET (E.), professeur au Prytanée militaire, rue Couchot, 8, à la Flèche.
1898. JAHNKE, assistant à l'Université de Berlin, Pariserstrasse, 55, à Wilmersdorf, près Berlin (Allemagne).
1873. JANIN, chef d'escadron au 15^e régiment d'artillerie, à Douai (Nord).
1898. JARRY (N.), ingénieur civil, rue Michel-Bizot, 187, à Paris.
1872. JAVARY, chef de bataillon du génie en retraite, chef des travaux graphiques à l'École Polytechnique, rue du Cardinal-Lemoine, 1, à Paris.
1872. JORDAN, membre de l'Institut, professeur à l'École Polytechnique et au Collège de France, rue de Varenne, 48, à Paris.
1872. JOUFFRET, lieutenant-colonel d'artillerie, rue de l'Estrapade, 20, à Paris.
1875. JUNG, professeur à l'Institut technique supérieur, via Borgonuovo, 9, à Milan (Italie).
1890. KOBK (Gustaf), maître de conférences à l'Université, à Stockholm (Suède).
1892. KOCH (H. von), maître de conférences à l'Université, à Djursholm-Stockholm (Suède).
1880. KÖNIGS, professeur à la Faculté des Sciences de Paris, répétiteur à l'École Polytechnique, boulevard Arago, 101, à Paris.
1897. LACAUCHE, ingénieur civil, chef du laboratoire de la Compagnie générale des Omnibus, rue de Saint-Petersbourg, 37, à Paris.
1881. LACOR, professeur de mathématiques, boulevard du Mont-Parnasse, 96, à Paris.
1873. LAISANT, docteur en sciences, répétiteur à l'École Polytechnique, avenue Victor-Hugo, 162, à Paris.
1893. LANCELIN, boulevard Arago, 97, à Paris.
1899. LANDAU (Édouard), docteur en philosophie, Dorotheenstrasse, 55, Berlin, N. W.

Date
de
l'admission.

1896. LAROSE, ingénieur des télégraphes, Usine des câbles sous-marins, à La Seyne (Var).
1896. LAUGEL, ancien attaché d'ambassade, villa des Bruyères, au Golfe Juan (Alpes-Maritimes).
1873. LAUTH, manufacturier, à Thann (Alsace).
1896. LEAU, professeur au collège Stanislas, rue Michelet, 5, à Paris.
1880. LÉAUTÉ, membre de l'Institut, boulevard de Courcelles, 18, à Paris.
1896. LEBEL, professeur au lycée de Montpellier, villa Mont-Carmel, avenue Bouisson-Bertrand, à Montpellier.
1893. LECORNU, ingénieur en chef des mines, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Gay-Lussac, 3, à Paris.
1895. LÉMERAY, licencié ès sciences, ingénieur civil du génie maritime, rue Ville-ès-Martin, 109 bis, à Saint-Nazaire (Loire-Inférieure).
1872. LEMOINE (Émile), ancien élève de l'École Polytechnique, avenue du Maine, 32, à Paris.
1879. LE PAIGE, professeur à l'Université, à l'observatoire de Cointe, à Liège (Belgique).
1895. LE ROUX, maître de conférences à la Faculté des Sciences, faubourg de Fougères, 41, à Rennes (Ille-et-Vilaine).
1898. LE ROY, docteur ès sciences, rue de l'Abbé-de-l'Épée, 8, à Paris.
1891. LERY, agent voyer d'arrondissement, à Pontoise (Seine-et-Oise).
1872. LESPIAULT, doyen honoraire de la Faculté des Sciences de Bordeaux, à Nérac (Lot-et-Garonne).
1882. LÉVY (Lucien), répétiteur et examinateur d'admission à l'École Polytechnique, rue du Regard, 12, à Paris.
1872. LÉVY (Maurice), membre de l'Institut, inspecteur général des ponts et chaussées, professeur au Collège de France, avenues du Trocadéro, 15, à Paris.
1875. LEZ (Henri), à Lorrez-le-Bocage (Seine-et-Marne).
1873. LIGUINE, curateur de l'arrondissement scolaire, à Varsovie (Russie).
1898. LINDELÖF (Ernst), professeur à l'Université, Boulevardsgatan, 12, à Helsingfors.
1877. LINDEMANN, professeur à l'Université, Franz-Josephstrasse, 12, à Munich (Bavière).
1886. LIQUVILLE, ingénieur des poudres, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, quai Henri IV, 12, à Paris.
1900. LOVETT (E.-O.), à Princeton, New-Jersey.
1888. LUCAS (Félix), ingénieur en chef des ponts et chaussées, rue Boissière, 30, à Paris.
1886. LYON, docteur ès sciences mathématiques, chemin de la Roseraie, 26, à Genève (Suisse).
1882. MACÉ DE LÉPINAY, professeur de mathématiques spéciales au lycée Henri IV, rue Claude-Bernard, 63, à Paris.
1895. MAILLET, docteur ès sciences, ingénieur des ponts et chaussées, boulevard de la Grande-Ceinture, à Palaiseau (Seine-et-Oise).
1875. MALLOIZEL, professeur de mathématiques, rue de l'Estrapade, 7, à Paris.
1872. MANNHEIM, colonel d'artillerie en retraite, professeur à l'École Polytechnique, boulevard Beauséjour, 1, à Paris.
1884. MARTIN (Artemas), Columbia street, 1534, N. W., à Washington D. C. (États-Unis d'Amérique).
1889. MARTIN (Émile), ancien élève de l'École Polytechnique, professeur de mathématiques, square du Croisic, 1 (boulevard du Mont-Parnasse), à Paris.
1894. MAUPIN, professeur au collège, à Issoire (Puy-de-Dôme).
1897. MEHNKE, professeur à l'École Polytechnique supérieure, Immenhoferstrasse, 4, à Stuttgart (Wurtemberg).

Date
de
l'admission.

1889. **MENDIZABAL TANBOREL** (DE), membre de la Société de Géographie de Mexico, calle de Jesus, 13, à Mexico (Mexique).
1884. **MERCEREAU**, licencié ès sciences, rue de l'Université, 193, à Paris.
1893. **MICHEL** (François), inspecteur de l'exploitation aux chemins de fer du Nord, à Béthune (Pas-de-Calais).
1899. **MILLER** (Dr G.-A.), professeur à Cornell University, à Ithaca, N. Y. (États-Unis).
1873. **MITTAG-LEFFLER**, professeur à l'Université, à Stockholm (Suède).
1897. **MONTCHEUIL** (l'abbé DE), école de l'Immaculée-Conception Sainte-Marie (Caousou), à Toulouse.
1898. **MONTESUS DE BALLORE** (R. DE), à Toulon-sur-Arroux (Saône-et-Loire).
1872. **MOUTARD**, inspecteur général des mines en retraite, rue du Val-de-Grâce, 9, à Paris.
1888. **MUKHOPADHYAY** (Asutosh), professeur de mathématiques, Russa Road, 77, North Rhowanipore, à Calcutta (Inde).
1898. **NAUD** (C.), éditeur, rue Racine, 3, à Paris.
1885. **NEUBERG**, professeur à l'Université, rue Sclessin, 6, à Liège (Belgique).
1897. **NICOLLIER**, professeur, à Montreux (Suisse).
1900. **NIWENGLOWSKI**, docteur ès sciences, inspecteur de l'Académie de Paris, rue de l'Arbalète, 35.
1882. **OCAGNE** (M. D'), ingénieur des ponts et chaussées, professeur à l'École des Ponts et Chaussées, répétiteur à l'École Polytechnique, rue La Boétie, 30, à Paris.
1873. **OIDIO** (Enrico D'), professeur à l'Université, Corso-Oporto, 30, à Turin (Italie).
1893. **PAINLEVÉ**, maître de conférences à l'École Normale supérieure, répétiteur à l'École Polytechnique, rue de Rennes, 99, à Paris.
1888. **PAPELIER** (Georges), professeur de mathématiques spéciales au lycée, rue de Recouvrance, 20, à Orléans (Loiret).
1881. **PARAF**, maître de conférences à la Faculté des Sciences, à Toulouse.
1872. **PARENTIER**, général du génie en retraite, rue du Cirque, 5, à Paris.
1872. **PARRAN**, ingénieur en chef des mines, rue des Saints-Pères, 56, à Paris.
1881. **PELLET**, doyen de la Faculté des Sciences, rue Pascal, 30, à Clermont-Ferrand.
1883. **PELLETREAU**, ingénieur en chef des chemins de fer éthiopiens, rue Scribe, 5, à Paris.
1898. **PELLETREAU** (Georges), attaché à l'exploitation des chemins de fer du Nord.
1900. **PERCHOT**, astronome adjoint à l'Observatoire de Paris, 7, rue Scheffer.
1874. **PERCIN**, colonel commandant le 27^e régiment d'artillerie, à Douai (Nord).
1881. **PEROTT** (Joseph), Université Clark, à Worcester (Massachusetts).
1873. **PERRIN**, ingénieur en chef des mines, rue Joinville, 25, au Mans (Sarthe).
1892. **PERRIN** (Élie), professeur de mathématiques, rue Lamandé, 7, à Paris.
1896. **PETROVITCH**, professeur à l'Université, Kossantch-Venac, 24, à Belgrade (Serbie).
1887. **PEZZO** (DEL), professeur à l'Université, via Gennaro Serra, 75, à Naples (Italie).
1879. **PICARD** (Émile), membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences et à l'École Centrale des Arts et Manufactures, rue Soufflot, 13, à Paris.
1872. **PICQUET**, chef de bataillon du génie, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, rue de Condé, 24, à Paris.
1896. **PIÉRON**, inspecteur général de l'Instruction publique, rue d'Assas, 50, à Paris.
1899. **PIERPONT** (James), prof. de l'Université Yale, New Haven, Connecticut (États-Unis).
1882. **POINCARÉ**, membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes, ingénieur en chef des mines, professeur à la Faculté des Sciences, rue Claude-Bernard, 63.

Date
de
l'admission.

1882. **POKORNY** (Martin), directeur du lycée communal, à Prague (Bohême).
1872. **POLIGNAC** (prince C. DE), villa Jessie, à Cannes (Alpes-Maritimes).
1899. **PRINGSHEIM**, professeur à l'Université de Munich, 12, Arcisstrasse.
1896. **PRUVOST**, inspecteur général de l'Instruction publique, 11, rue de la Tour, à Paris.
1872. **PUTZ**, général d'artillerie en retraite, rue Saint-Merry, 98, à Fontainebleau.
1896. **QUIQUET**, actuaire de la Compagnie *la Nationale*, rue de Grammont, 13, à Paris.
1898. **RABUT** (Charles), ingénieur en chef des ponts et chaussées, rue Duplessis, 77, à Versailles (Seine-et-Oise).
1872. **RADAU**, membre de l'Institut, rue de Tournon, 12, à Paris.
1883. **RAFFY**, professeur-adjoint à la Faculté des Sciences, maître de conférences à l'École Normale supérieure, rue Nicole, 7, à Paris.
1898. **RIPERT**, commandant du génie en retraite, rue Saint-Antoine, 200, à Paris.
1893. **RIVEREAU** (l'abbé), professeur à l'Institut catholique, à Angers (Maine-et-Loire).
1872. **ROUART**, ingénieur civil, rue de Lisbonne, 34, à Paris.
1872. **ROUCHÉ**, de l'Institut, professeur au Conservatoire des arts et métiers, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, boulevard Saint-Germain, 213, à Paris.
1896. **ROUGIER**, docteur ès sciences, professeur au lycée, à Toulon (Var).
1885. **ROUQUET** (V.), professeur honoraire de mathématiques spéciales, à Belpèch (Aude).
1900. **SALTYKOW**, maître ès sciences mathématiques, rue du Cardinal-Lemoine, 71.
1896. **SANCHEZ**, directeur de l'observatoire, à San Salvador (République de San Salvador).
1889. **SARAZ**, professeur de mathématiques, rue Saint-Jacques, 220, à Paris.
1872. **SARRAU**, membre de l'Institut, ingénieur en chef des poudres, professeur à l'École Polytechnique, avenue Daumesnil, 9 bis, à Saint-Mandé (Seine).
1872. **SANTIAUX**, ingénieur en chef des ponts et chaussées, chef de l'exploitation à la Compagnie du chemin de fer du Nord, à Paris.
1885. **SAUVAGE**, professeur à la Faculté des Sciences, à Marseille (Bouches-du-Rhône).
1881. **SCHLEGEL**, professeur à l'École technique, Volmestrasse, 62, à Hagen (Allemagne).
1897. **SCHOU** (Erik), Gl. Antvorskov, à Slagelse (Danemark).
1881. **SCHOUTE**, professeur à l'Université, à Groningue (Hollande).
1896. **SÉGUIER** (J.-A. DE), docteur ès sciences, rue de Sèvres, 35, à Paris.
1882. **SÉLIVANOFF** (Démétrius), attaché à l'Université, Fontanka, 116, log. 16, à Saint-Petersbourg (Russie).
1900. **SERVANT**, docteur ès sciences, Grande-Rue, 75, à Bourg-la-Reine (Seine).
1900. **SPARRÉ** (comte Magnus DE), château de Vallière, à St-Georges-de-Reneins (Rhône).
1881. **STARKOFF**, professeur à l'École de commerce, Deribasowskaja, 6, à Odessa (Russie).
1879. **STEPHANOS** (D^r Cyparissos), professeur à l'Université, à Athènes (Grèce).
1898. **STÖRNER** (Carl), chargé de cours à l'Université, Huitfeldts gade, 9, à Christiania.
1873. **STUDNICKA**, professeur à l'Université, à Prague (Bohême).
1872. **SYLOW**, professeur à l'Université, à Frederikshald (Norvège).
1899. **SYRIEX**, boulevard Beauséjour, 23, à Paris.
1896. **TANNENBERG** (DE), professeur à la Faculté des Sciences, à Bordeaux (Gironde).
1872. **TANNERY** (Paul), directeur des manufactures de l'État, à Pantin (Seine).
1875. **TANNERY** (Jules), sous-directeur à l'École Normale supérieure, rue d'Ulm, 45, à Paris.
1882. **TARRY** (Gaston), receveur des Contributions diverses, à Kouba (Algérie).
1897. **TARRY** (Harold), inspecteur des finances en retraite, à Kouba (Algérie).
1872. **TERRIER**, professeur au collège Chaptal, rue Larribe, 3, à Paris.

Date
de
l'admission.

1899. **THYBAUT** (Alexandre), place d'Anvers, 10, à Paris.
 1873. **TISSOT**, ancien examinateur d'admission à l'École Polytechnique, à Voreppe (Isère).
 1896. **TISSOT**, enseigne de vaisseau, professeur au *Borda*, à Brest (Finistère).
 1896. **TORRES**, ingénieur des ponts et chaussées, Valgame Dios, 3, à Madrid (Espagne).
 1893. **TOUCHE**, lieutenant-colonel d'artillerie territoriale, rue Truffault, 23, à Paris.
 1872. **TRESCA**, ingénieur en chef des ponts et chaussées en retraite, château de Courtozé, par Vendôme (Loir-et-Cher).
 1896. **TRESSE**, docteur ès sciences, professeur au collège Stanislas, boulevard du Mont-Parnasse, 164, à Paris.
 1893. **VALLÉE-POUSSIN** (Ch.-J. de la), professeur à l'Université, rue de Namur, 190, à Louvain (Belgique).
 1880. **VANECEK** (J.-S.), professeur au lycée, à Jicin (Bohême).
 1897. **VASSILAS-VITALIS** (J.), docteur de l'Université, rue Polyclète, 5, à Athènes (Grèce).
 1898. **VASSILIEF**, président de la Société physico-mathématique, à Kasan (Russie).
 1876. **VICAIRE**, inspecteur général des mines, rue Gay-Lussac, 30, à Paris.
 1888. **VOLTERRA** (Vito), professeur à l'Université, via S. Quintino, 45, à Turin (Italie).
 1900. **VUIBERT**, éditeur, 63, boulevard Saint-Germain.
 1893. **WAGNER**, professeur à l'École J.-B. Say, rue Spontini, 13, à Paris.
 1880. **WALCKENAEER**, ingénieur en chef des mines, boulevard Saint-Germain, 218, à Paris.
 1879. **WEILL**, directeur du collège Chaptal, boulevard des Batignolles, 45, à Paris.
 1873. **WEYR** (Dr Edouard), professeur à l'École Polytechnique, à Prague (Bohême).
 1878. **WORMS DE ROMILLY**, ingénieur en chef des mines, rue Balzac, 7, à Paris.
 1882. **ZABOUDSKI**, membre du Comité d'artillerie et professeur à l'Académie d'Artillerie, à Saint-Petersbourg (Russie).
 1890. **ZAREMBA**, docteur ès sciences, professeur au lycée, maison Vinel, faubourg Cabesut, à Cahors (Lot).
 1881. **ZEUTHEN**, professeur à l'Université, Rosenvonget, 3, Sidealle, à Copenhague.
 1898. **ZIWET**, professeur à l'Université Ann-Arbor, à Michigan (États-Unis).

SOCIÉTAIRES PERPÉTUELS.

BENOIST (décédé). — **BERDELLÉ**, à Rioz. — **BIENAYMÉ** (décédé). — **BIOCNE**, à Paris. — **BISCHOFFSHEIM**, à Paris. — **BORCHARDT** (décédé). — **BROCARD**, à Bar-le-Duc. — **CANET**, à Paris. — **CARVALLO**, à Paris. — **CHASLES** (décédé). — **CLAUDE-LAFONTAINE**, à Paris. — **FOURET**, à Paris. — **GAUTHIER-VILLARS** (décédé). — **GOURSAT**, à Paris. — **HALPHEN** (décédé). — **HALSTED**, à Austin. — **HADAMARD**, à Paris. — **HATON DE LA COUILLIÈRE**, à Paris. — **HERMITE**, à Paris. — **HIRST** (décédé). — **HOTT**, à Paris. — **LÉAUTÉ**, à Paris. — **JORDAN**, à Paris. — **LAFFON DE LADÉBAT** (décédé). — **WANNHEIM**, à Paris. — **DE MENDIZABAL TAMBORRE**, à Mexico. — **MERCEREAU**, à Paris. — **D'OCAGNE**, à Paris. — **PEROTT**, à Worcester. — **PERRIN**, au Mans. — **POINCARÉ**, à Paris. — **POLIGNAC** (prince C. de), à Cannes. — **RAFFY**, à Paris. — **SÉLIVANOFF**, à Saint-Petersbourg. — **SPARRÉ** (comte M. de), à Saint-Georges-de-Reneins. — **SYLOW**, à Frederikshald. — **TANNERY** (Paul), à Paris. — **TARRY** (G.), à Kouba. — **TCHEBICHEF** (décédé). — **VIOLLARD** (décédé).

LISTE

DES

PRÉSIDENTS DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

DEPUIS SA FONDATION.

MM.		MM.	
1873	CHASLES.	1887	FOURET.
1874	LAFON DE LADÉBAT.	1888	LAISANT.
1875	BIENAYME.	1889	DÉSIRÉ ANDRÉ.
1876	DE LA GOURNERIE.	1890	HATON DE LA GOUPELLIÈRE.
1877	MANNHEIM.	1891	COLLIGNON.
1878	DARBOUX.	1892	VICAIRE.
1879	O. BONNET.	1893	HUMBERT.
1880	JORDAN.	1894	PICQUET.
1881	LAGUERRE.	1895	GOURSAT.
1882	HALPHEN.	1896	KÖNIGS.
1883	ROUCHÉ.	1897	PICARD.
1884	PICARD.	1898	LECORNU.
1885	APPELL.	1899	GUYOU.
1886	POINCARÉ.	1900	POINCARÉ.

Liste des Sociétés scientifiques et des Recueils périodiques avec lesquels
la Société mathématique de France échange son Bulletin.

Amsterdam.....	Académie Royale des Sciences d'Amsterdam.	Hollande.
Amsterdam.....	Société mathématique d'Amsterdam.	Hollande.
Amsterdam.....	<i>Revue semestrielle des publications mathématiques.</i>	Hollande.
Baltimore.....	<i>American Journal of Mathematics.</i>	États-Unis.
Berlin.....	Académie des Sciences de Berlin.	Allemagne.
Berlin.....	<i>Archiv für Mathematik und Physik.</i>	Allemagne.
Berlin.....	<i>Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik.</i>	Allemagne.
Berlin.....	<i>Journal für die reine und angewandte Mathematik.</i>	Allemagne.
Bologne.....	Académie des Sciences de l'Institut de Bologne.	Italie.
Bordeaux.....	Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux.	France.
Bruxelles.....	Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique.	Belgique.
Bruxelles.....	Société scientifique de Bruxelles.	Belgique.
Cambridge.....	Société philosophique de Cambridge.	Grande-Bretagne.
Christiana.....	<i>Archiv for Mathematik og Naturvidenskab.</i>	Norvège.
Coimbre.....	<i>Jornal de Sciencias matematicas e astronomicas.</i>	Portugal.
Copenhague.....	<i>Nyt Tidsskrift for Mathematik.</i>	Danemark.
Cracovie.....	Académie des Sciences de Cracovie.	Autriche.
Delft.....	Ecole Polytechnique de Delft.	Hollande.
Édimbourg.....	Société Royale d'Édimbourg.	Grande-Bretagne.
Édimbourg.....	Société mathématique d'Édimbourg.	Grande-Bretagne.
Gand.....	<i>Mathesis.</i>	Belgique.
Goettingue.....	Société Royale des Sciences de Goettingue.	Allemagne.
Hambourg.....	Société mathématique de Hambourg.	Allemagne.
Harlem.....	Société hollandaise des Sciences.	Hollande.
Helsingfors.....	Société des Sciences de Finlande.	Finlande.
Kasan.....	Société physico-mathématique.	Russie.
Kharkov.....	Annales de l'Université.	Russie.
Kharkov.....	Société mathématique de Kharkov.	Russie.
Leipzig.....	Société Royale des Sciences de Saxe.	Allemagne.
Leipzig.....	<i>Mathematische Annalen.</i>	Allemagne.
Liège.....	Société Royale des Sciences.	Belgique.
Londres.....	Société astronomique de Londres.	Grande-Bretagne.
Londres.....	Société mathématique de Londres.	Grande-Bretagne.
Londres.....	Société Royale de Londres.	Grande-Bretagne.
Luxembourg.....	Institut Royal de Luxembourg.	Luxembourg.
Marseille.....	<i>Annales de la Faculté des Sciences de Marseille.</i>	France.
Mexico.....	Sociedad científica Antonio Alzate.	Mexique.

Milan	Institut Royallombard des Sciences et Lettres.	Italie.
Moscou.....	Société mathématique de Moscou.	Russie.
Munich.....	Académie des Sciences de Munich.	Bavière.
Naples.....	Académie Royale des Sciences physiques et mathématiques de Naples.	Italie.
New-Haven.....	Académie des Sciences et Arts du Connecticut.	États-Unis.
New-York.....	Société mathématique américaine.	États-Unis.
Odessa.....	Société mathématique d'Odessa.	Russie.
Palerme.....	<i>Rendiconti del Circolo matematico.</i>	Italie.
Paris.....	Académie des Sciences de Paris.	France.
Paris.....	Association française pour l'avancement des Sciences.	France.
Paris.....	Société philomathique de Paris.	France.
Paris.....	<i>Bulletin des Sciences mathématiques.</i>	France.
Paris.....	<i>Journal de l'École Polytechnique.</i>	France.
Paris.....	<i>Journal de Mathématiques élémentaires.</i>	France.
Paris.....	<i>Journal de Mathématiques spéciales.</i>	France.
Paris.....	Institut des Actuaire français.	France.
Pise.....	École Royale Normale supérieure de Pise.	Italie.
Pise.....	Université Royale de Pise.	Italie.
Pise.....	<i>Il Nuovo Cimento.</i>	Italie.
Prague.....	Académie des Sciences de Prague.	Autriche.
Prague.....	<i>Casopis pro pěstování matematiky a fysiky.</i>	Autriche.
Prague.....	Société mathématique de Prague.	Autriche.
Rome.....	Académie Royale des <i>Lincei</i> .	Italie.
Saint-Petersbourg.	Académie Impériale des Sciences.	Russie.
Stockholm.....	<i>Acta Mathematica.</i>	Suède.
Toulouse.....	<i>Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse.</i>	France.
Turin.....	Académie des Sciences.	Italie.
Upsal.....	Société Royale des Sciences d'Upsal.	Suède.
Venise.....	Institut Royal vénitien des Sciences, Lettres et Arts.	Italie.
Vienne.....	Académie Impériale des Sciences de Vienne.	Autriche.
Vienne.....	<i>Monatshefte für Mathematik und Physik.</i>	Autriche.
Zurich.....	Société des Sciences naturelles de Zurich.	Suisse.

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

SUR UNE TRANSFORMATION DE L'ÉQUATION

$$s^2 = i\lambda(x, y) pq;$$

Par M. E. GOURSAT.

1. Je me suis déjà occupé, à diverses reprises, de l'équation aux dérivées partielles du second ordre (1)

$$(1) \quad \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} \right)^2 = i\lambda(x, y) \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y};$$

en posant $\frac{\partial \theta}{\partial x} = z^2$, on ramène l'équation (1) à une équation linéaire

$$(2) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial \log \lambda}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} - \lambda z = 0,$$

et, à toute solution z de l'équation (2) correspond une intégrale de l'équation (1) qui est complètement déterminée, à une con-

(1) *Bulletin de la Société mathématique*, t. XXV, p. 36-48; 1897.

Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre, t. II, p. 252.

stante additive près,

$$(3) \quad \theta = \int z^2 dx + \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 dy.$$

Les invariants h et k de l'équation (2) ont les valeurs suivantes

$$h = \lambda, \quad k = \lambda - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial x \partial y},$$

et ceux de l'équation que l'on en déduit par l'application de la première transformation de Laplace ont les valeurs

$$h_1 = 2h - k - \frac{\partial^2 \log h}{\partial x \partial y} = k, \quad k_1 = h;$$

ils sont précisément les mêmes que ceux de l'équation adjointe. Cela posé, imaginons la suite de Laplace relative à l'équation (2), suite qui est, en général, illimitée dans les deux sens

$$\dots, (E_{-i}), \dots, (E_{-1}), (E), (E_1), (E_2), \dots, (E_i), (E_{i+1}), \dots;$$

les invariants des deux équations (E) et (E_i) , d'après ce que nous venons de voir, sont les mêmes et disposés dans l'ordre inverse. Il résulte de la loi de récurrence qu'il en sera de même des équations (E_{-i}) et (E_2) , (E_{-2}) et (E_3) , ..., (E_{-i}) et (E_{i+1}) . Si donc la suite de Laplace se termine d'un côté, vers la droite, par exemple, à l'équation (E_{i+1}) , elle se terminera vers la gauche à l'équation (E_{-i}) , et l'on aura une suite de $2i + 2$ équations telles que deux équations à égale distance des extrêmes aient les mêmes invariants disposés dans l'ordre inverse. Lorsqu'une équation à invariants égaux $s = \lambda z$ est intégrable par la méthode de Laplace, elle donne naissance à une suite de $2i + 1$ équations jouissant de la même propriété; la seule différence entre les deux cas, c'est qu'on a, dans le second cas, un nombre impair d'équations et, dans le premier cas, un nombre pair.

La propriété précédente rapproche les équations linéaires de la forme (2) et, par suite, l'équation (1) des équations à invariants égaux. On est ainsi conduit à se demander s'il ne serait pas possible de trouver, pour les équations (1) et (2), un théorème analogue au beau théorème de M. Moutard sur les équations à invariants

riants égaux ⁽¹⁾. C'est en effet ce qui a lieu, comme on va voir.

2. Posons, pour abréger,

$$\mathcal{F}(\theta) = \frac{\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}\right)^2}{4 \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y}};$$

l'équation (1) est alors

$$\mathcal{F}(\theta) = \lambda(x, y),$$

ou encore, en désignant par θ_1 une intégrale particulière,

$$(5) \quad \mathcal{F}(\theta) = \mathcal{F}(\theta_1).$$

A toute fonction θ_1 des deux variables x, y correspond une fonction $\lambda(x, y)$ bien déterminée; si l'on remplace λ par cette fonction dans l'équation (2), on a une équation linéaire que nous appellerons $E(z, \theta_1)$, admettant l'intégrale particulière $z_1 = \sqrt{\frac{\partial \theta_1}{\partial x}}$.

Rappelons encore les propriétés suivantes. Étant donnée une équation linéaire

$$s + ap + bq + cz = 0,$$

cette équation peut s'obtenir d'une infinité de manières par l'élimination de u entre les deux équations

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \gamma \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{z}{z_1} \right), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \delta_1 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{z}{z_1} \right);$$

il suffit de connaître une intégrale particulière z_1 de l'équation proposée et une intégrale particulière v_1 de l'équation adjointe, et l'on a γ et δ_1 par une quadrature ⁽²⁾

$$\gamma = \int z_1 \left(bv_1 - \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) dx - v_1 (q_1 + az_1) dy, \quad \delta_1 = \gamma + v_1 z_1.$$

⁽¹⁾ MOUTARD, *Sur la construction des équations de la forme*

$$\frac{1}{z} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \lambda(x, y),$$

qui admettent une intégrale générale explicite (*Journal de l'École Polytechnique*, XLV^e Cahier, p. 1; 1878).

Voir aussi le Chapitre VII du Livre IV, dans le Tome II de la *Théorie générale des surfaces*, de M. DARBOUX.

⁽²⁾ Voir, par exemple, le Tome II des *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre*, p. 277.

. Dans le cas où nous nous plaçons, l'équation adjointe de l'équation $E(z, \theta_1)$ a les mêmes invariants que celle qu'on déduit de $E(z, \theta_1)$ par la première transformation de Laplace. On vérifie en effet facilement que l'on passe de l'équation (2) à son adjointe

$$(1) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial \log \lambda}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial x \partial y} - \lambda \right) v = 0,$$

en posant $v = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial z_1}{\partial y}$.

Cela posé, à l'intégrale z_1 de l'équation $E(z, \theta_1)$ correspond l'intégrale particulière $v_1 = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial z_1}{\partial y}$ de l'équation adjointe; en prenant pour z_1 et v_1 les valeurs précédentes, on trouve, en tenant compte de l'équation (2) elle-même,

$$\gamma = - \int z_1^2 dx - \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\partial z_1}{\partial y} \right)^2 dy = -\theta_1, \quad \delta_1 = -\theta_1 + \frac{z_1}{\lambda} \frac{\partial z_1}{\partial y},$$

et les formules de transformation s'écrivent, en changeant z en $-z$,

$$(6) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \theta_1 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{z}{z_1} \right), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \left(\theta_1 - \frac{z_1}{\lambda} \frac{\partial z_1}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{z}{z_1} \right).$$

Il est aisé de vérifier que l'élimination de u conduit bien à l'équation (2). Des relations $\frac{\partial \theta_1}{\partial x} = z_1^2$, $\left(\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x \partial y} \right)^2 = 4\lambda \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \frac{\partial \theta_1}{\partial y}$, on tire

$$\begin{aligned} 2 z_1 \frac{\partial z_1}{\partial y} &= \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x \partial y}, \\ \frac{1}{\lambda} z_1 \frac{\partial z_1}{\partial y} &= \frac{\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x \partial y} \frac{\partial \theta_1}{\partial y}}{\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x \partial y}}, \\ \theta_1 - \frac{1}{\lambda} z_1 \frac{\partial z_1}{\partial y} &= \theta_1 - \frac{\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x \partial y} \frac{\partial \theta_1}{\partial y}}{\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x \partial y}} = - \frac{\theta_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{1}{\theta_1} \right)}{\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x \partial y}}, \end{aligned}$$

et les formules qui définissent la transformation peuvent encore

s'écrire, en remplaçant u par $\frac{\omega}{\sqrt{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\theta_1}\right)}}$,

$$(7) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\omega}{\sqrt{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\theta_1}\right)}} \right] &= \theta_1 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{z}{\sqrt{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\theta_1}\right)}} \right), \\ \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\omega}{\sqrt{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\theta_1}\right)}} \right] &= - \frac{\theta_1^3 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{1}{\theta_1} \right)}{\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x \partial y}} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{z}{\sqrt{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\theta_1}\right)}} \right). \end{aligned}$$

Ces formules ne changent pas quand on permute z et ω , pourvu qu'on change en même temps θ_1 en $\frac{1}{\theta_1}$; donc, si l'élimination de ω conduit à l'équation linéaire $E(z, \theta_1)$, il s'ensuit que l'élimination de z doit conduire à une équation de même forme $E\left(\omega, \frac{1}{\theta_1}\right)$, et nous pouvons énoncer la proposition suivante :

De toute intégrale de l'équation linéaire $E(z, \theta_1)$ on peut déduire, par une quadrature, une intégrale de l'équation de même forme $E\left(z, \frac{1}{\theta_1}\right)$.

Puisque l'intégration de l'équation $\mathcal{F}(\theta) = \mathcal{F}(\theta_1)$ se ramène à celle de l'équation $E(z, \theta_1)$, on a aussi le théorème suivant :

De toute intégrale de l'équation $\mathcal{F}(\theta) = \mathcal{F}(\theta_1)$, on peut déduire, par des quadratures, une intégrale de l'équation

$$\mathcal{F}(\theta) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{\theta_1}\right).$$

Les conséquences sont analogues à celles que l'on déduit du théorème de M. Moutard, relativement aux équations aux invariants égaux. De toute équation intégrable de la forme (2) on pourra déduire, en répétant l'opération précédente, toute une suite indéfinie d'équations intégrables de la même espèce. Ainsi,

on pourra, en partant de l'équation

$$s + \frac{q}{x+y} - \frac{z}{(x+y)^2} = 0,$$

dont l'intégrale générale est

$$z = X' + \frac{Y - X}{x+y},$$

obtenir toutes les équations linéaires de l'espèce considérée ici, qui sont intégrables par la méthode de Laplace.

Remarque. — On déduit des formules (6)

$$du = \theta_1 d\left(\frac{z}{z_1}\right) - \frac{z_1}{\lambda} \frac{\partial z_1}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{z}{z_1}\right) = d\left(\theta_1 \frac{z}{z_1}\right) - \left(zz_1 dx + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial z_1}{\partial y} dy\right),$$

et, par suite,

$$(8) \quad u = \theta_1 \frac{z}{z_1} - \int zz_1 dx + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial z_1}{\partial y} dy.$$

La transformation définie par les formules (6) est donc équivalente à l'ensemble des deux transformations suivantes. Posons

$$(9) \quad w = \int zz_1 dx + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial z_1}{\partial y} dy;$$

w satisfait à l'équation linéaire

$$(10) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \log z_1}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} - \lambda \frac{z_1}{\frac{\partial z_1}{\partial y}} \frac{\partial w}{\partial y} = 0,$$

qui admet l'intégrale particulière $w_1 = \theta_1$, et u peut s'écrire

$$u = w_1 \frac{zz_1}{z_1^2} - w = \frac{w_1 \frac{\partial w}{\partial x} - w \frac{\partial w_1}{\partial x}}{\frac{\partial w_1}{\partial x}}.$$

On peut remarquer que la fonction w satisfait, quelles que soient les intégrales z et z_1 , à une équation aux dérivées partielles du quatrième ordre qu'il serait facile de former.

SUR LES GROUPES ÉCHANGEABLES ET LES GROUPES DÉCOMPOSABLES;

Par M. EDMOND MAILLET.

I.

Dans une Note antérieure ⁽¹⁾ nous avons appelé un groupe D *décomposable* quand l'on peut y trouver deux sous-groupes A et B d'ordre > 1 , tous deux $< D$ et tels que toute substitution d de D soit le produit d'une substitution a de A, par une b de B; on indique cette propriété en écrivant $D = AB = A \times B$. D sera dit le produit de A par B; A et B sont des facteurs de D: on a évidemment $D = AB = BA$.

Tout groupe est-il décomposable? A défaut d'un criterium de *décomposabilité*, on pourrait étudier les groupes connus: il y a là tout un sujet de recherches.

Nous ne prétendons pas résoudre ici la question ⁽²⁾, tout en nous proposant d'étudier un certain nombre des propriétés de la décomposabilité des groupes. Parmi les groupes dont nous nous sommes occupé, nous n'avons trouvé d'autres groupes indécomposables que ceux formés des puissances d'une substitution circulaire d'ordre p^m (p premier).

II.

DÉCOMPOSABILITÉ DE CERTAINS GROUPES.

1° *Groupes primitifs composés*. — Un pareil groupe G est toujours décomposable, car tout sous-groupe invariant K de G est transitif ⁽³⁾, et si H est le sous-groupe des substitutions de G

⁽¹⁾ *Note sur les substitutions* (Bulletin de la Société Mathématique, t. XXIV; 1896). La plupart des considérations de la Note actuelle s'appliquent aussi bien aux groupes d'opérations qu'aux groupes de substitutions. Divers auteurs ont déjà envisagé les groupes échangeables, par exemple Serret et M. Frobenius.

⁽²⁾ Nous croyons au contraire, sous réserve de vérification, l'avoir résolue par l'affirmative pour les groupes de transformations de Lie.

⁽³⁾ JORDAN, *Traité des Substitutions*, p. 41.

qui laissent une même lettre de G immobile on a $G = H \times K$, avec $H < G$, $K < G$ (¹).

2° *Groupes composés quelconques.* — D'après les mêmes remarques, soient G un pareil groupe, H un sous-groupe invariant maximum de G :

α . Si l'on peut trouver un sous-groupe invariant H' de G non contenu dans H , on a $G = H \times H'$. En effet, si h et h' sont les ordres de H et H' , k l'ordre du groupe K des substitutions communes à H et H' , l'ordre du groupe (H, H') dérivé de H et de H' est $\frac{hh'}{k} > h$, en sorte que $(H, H') = G$, puisque (H, H') est invariable par les substitutions de G ; alors les substitutions de G sont toutes de la forme $\eta\eta'$, η appartenant à H , η' à H' .

β . Si H est à la fois maximum dans G et invariable par les substitutions de G , et si l'on peut trouver un sous-groupe H' de G non contenu dans H , on a encore $G = H \times H'$. En particulier un groupe d'ordre p^m non formé des puissances d'une substitution circulaire d'ordre p^m est décomposable. Au contraire, le groupe des puissances d'une substitution circulaire d'ordre p^m est indécomposable.

3° *Groupes d'ordre $p^m q^n$ (p et q premiers différents).* — Un pareil groupe G contient un sous-groupe P d'ordre p^m , un Q d'ordre q^n . On a $G = P \times Q$.

4° *Groupes de degré p^m (p premier) et d'ordre $\neq p^n$.* — Soit G un pareil groupe : si H_α est le groupe des substitutions de G qui laissent une même lettre α immobile, $p^{m'}$ la plus haute puissance de p qui divise l'ordre g de G , G renferme un sous-groupe P d'ordre $p^{m'}$, et $G = P \times H_\alpha$.

(¹) Voir notre Note précitée où nous montrons que le problème de la recherche des sous-groupes transitifs des isomorphes holoédriques et transitifs d'un groupe donné est compris dans celui de la recherche des décompositions de ce groupe en un produit de deux sous-groupes, et lui est équivalent quand le groupe donné est simple.

5° *Groupes d'ordre $4h + 2$.* — G renferme un sous-groupe d'ordre 2 et un sous-groupe invariant d'ordre $2h + 1$ dont il est le produit.

6° *Groupe alterné G de n éléments.* — Il est décomposable. En effet, on sait qu'il suffit d'établir l'existence d'un sous-groupe transitif A de G . Si alors B est le groupe alterné de $n - 1$ éléments, $G = A \times B$.

a. n impair. On prend pour A le groupe des puissances d'une substitution d'ordre n .

b. n pair et $= 4h$. On prend pour A le groupe dérivé des substitutions

$$\begin{aligned}\gamma &= (a_1 a_2 \dots a_{2h}) (a_{2h+1} \dots a_{4h}), \\ \gamma' &= (a_1 a_{2h+1}) \dots (a_{2h} a_{4h}).\end{aligned}$$

c. n pair et $= 4h + 2 = 2p$.

On prend pour A le groupe dérivé ⁽¹⁾ de la substitution

$$\gamma = (a_1 a_2 \dots a_p) (a_{p+1} \dots a_{2p}),$$

et des substitutions

$$(a_i a_{p+i}) (a_j a_{p+j}) \quad (i \neq j, \ i, j = 1, 2, \dots, p).$$

7° *Groupe symétrique de n éléments.* — Il est décomposable. En effet, on a $G = A \times B$, B étant le groupe symétrique de $n - 1$ éléments, A le groupe des puissances d'une substitution circulaire d'ordre n .

Il résulte de là cette conclusion intéressante :

L'ensemble des groupes décomposables est plus étendu que l'ensemble des groupes primitifs composés, puisque tout groupe primitif composé est décomposable et que les groupes alternés sont décomposables.

⁽¹⁾ Ce groupe est d'ordre $2^{p-1}p$ et, d'après un théorème de Mathieu (*Journal de Mathématiques*, 1861), généralisé par M. Sylow, contient $2^{p-1} = 1 + np$ sous-groupes d'ordre p . On en conclut $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, théorème dû à Fermat. Cette démonstration n'est qu'un cas particulier de la démonstration du théorème de Fermat [$a^p \equiv a \pmod{p}$ quel que soit a], que nous avons donnée dans notre *Thèse de Doctorat* (Gauthier-Villars; 1892, p. 116), en nous appuyant sur le théorème de Mathieu et de M. Sylow.

Nous énoncerons encore les propriétés suivantes, dont les démonstrations ne sont qu'indiquées :

LEMME. — *Si deux sous-groupes H_1 et H_2 , d'ordres h_1 et h_2 , d'un groupe G d'ordre g , sont tels que le plus petit commun multiple de h_1 et h_2 est g , on a $G = H_1 \times H_2$.*

On voit, en effet, de suite que le groupe (H_1, H_2) , dérivé de H_1 et H_2 , contient au moins g substitutions qui sont le produit d'une substitution de H_1 par une de H_2 .

THÉORÈME. — *Si un groupe primitif G de degré n est indécomposable, il possède au moins deux isomorphes holoédriques et primitifs de degrés différents et différents de n .*

En effet, soient p un diviseur premier de n , p^α la plus haute puissance de p qui divise l'ordre g de G . G contient au moins un sous-groupe maximum H d'ordre h divisible par p^α , et auquel correspond ⁽¹⁾ un isomorphe holoédrique et primitif Γ de G , de degré $\frac{g}{h}$ premier à p et $\neq n$.

Soit q un autre diviseur premier quelconque de n , q^β la plus haute puissance de q qui divise g : si $h \equiv 0 \pmod{q^\beta}$, quel que soit le diviseur q de n , le lemme précédent montre que G est décomposable.

Si donc G n'est pas décomposable, on peut trouver q tel que $n \equiv 0 \pmod{q}$ avec $h \not\equiv 0 \pmod{q^\beta}$. Il existe alors un sous-groupe maximum H_1 de G d'ordre h_1 divisible par q^β , auquel correspond un isomorphe holoédrique et primitif Γ_1 de G de degré $\frac{g}{h_1}$ premier à q et différent de n et de $\frac{g}{h}$.

III.

QUELQUES PROPRIÉTÉS DES GROUPES DÉCOMPOSABLES.

1° Si $A = B \times B'$, et si D contient B et est contenu dans A , on a $A = D \times B'$.

⁽¹⁾ Voir, par exemple, W. DYCK, *Mathematische Annalen*, t. XX et XXII, et notre *Thèse de Doctorat*, p. 12 et 15.

Nous dirons que B et B' sont des *facteurs complémentaires* de A.

2° Si $A = B \times B' = C \times C'$, C étant contenu dans B, on a $B = C \times D$, D étant le groupe commun à B et C'.

En effet, soient a, b, b', c, c', d les ordres respectifs de A, B, B', C, C', D; E le groupe commun à B et B', d'ordre e ; F le groupe commun à C et C', d'ordre f . On a

$$a = \frac{bb'}{e} = \frac{cc'}{f} = \frac{bc'}{d}.$$

On en conclut

$$b = \frac{cd}{f}.$$

Soit Φ , d'ordre φ , le groupe commun à C et D; B contenant C et D, on a $b \geq \frac{cd}{\varphi}$. D étant contenu dans C', Φ est contenu dans C et C', par suite dans F, et $\varphi \leq f$. On en tire

$$\frac{cd}{\varphi} \geq \frac{cd}{f} = b \geq \frac{cd}{\varphi},$$

d'où $\varphi = f$. Donc si γ et δ sont des substitutions de C et D respectivement, on a exactement $\frac{cd}{f}$ substitutions de la forme $\gamma\delta$ et $B = C \times D$.

3° Réciproquement, si $A = B \times C'$, et $B = C \times D$, D étant le groupe commun à B et C', on a $A = C \times C'$.

En effet, si F est le groupe commun à C et C', il suffit de montrer que

$$a = \frac{cc'}{f}.$$

Or

$$a = \frac{bc'}{d}, \quad b = \frac{cd}{\varphi},$$

Φ étant le groupe commun à C et D, d'où

$$a = \frac{c'}{d} \frac{cd}{\varphi} = \frac{cc'}{\varphi}.$$

Or F, commun à C et C', est commun à B et C' : donc F est contenu dans D, c'est-à-dire commun à D et C, par suite contenu

dans Φ ; f divise φ , et $f \leq \varphi$. Mais $\frac{cc'}{f} \leq a = \frac{cc'}{\varphi}$, puisque C et C' sont contenus dans A; donc $\varphi \leq f$, d'où $f = \varphi$, $a = \frac{cc'}{f}$.

4° Si A et B sont échangeables à C, (A, B) est échangeable à C.

5° Si A et B sont échangeables, et si C, contenu dans B, est échangeable à A, soit D le groupe commun à A et B : D est échangeable à C.

Soient $\alpha, \alpha', \dots; \beta, \dots; \gamma, \dots; \delta, \dots$ des substitutions de A, B, C, D respectivement. On a

$$\begin{aligned}\alpha\beta &= \beta'\alpha', \\ \alpha\gamma &= \gamma'\alpha', \\ \delta\gamma &= \gamma''\alpha'', \\ \alpha'' &= \gamma''^{-1}\delta\gamma = \beta'' = \delta', \\ \delta\gamma &= \gamma''\delta'.\end{aligned}$$

6° Si $A = CB'$ et si B contient C et est contenu dans A, on a $B = C \times D$, D étant le groupe commun à B et B'.

Il suffit d'appliquer la deuxième propriété en faisant $C' = B'$.

7° Réciproquement si $A = B \times B'$, si D est le groupe commun à B et B', et si $B = C \times D$, on a $A = CB'$.

On applique la troisième propriété en faisant $C' = B'$.

IV.

AUTRE MANIÈRE DE PRÉSENTER CERTAINES DES IDÉES PRÉCÉDENTES.

Soient G un groupe transitif qui ne soit pas primitif, H_α le groupe qui laisse une lettre α immobile, N le degré de G, g, h_α les ordres de G et H_α ; on a $g = Nh_\alpha$.

Soient

$$\begin{array}{cccc} P_1, & P_2, & \dots, & P_N, \\ & & & \underline{p} \\ Q_1, & Q_2, & \dots, & Q_N, \\ & & & \underline{q} \end{array}$$

deux répartitions des lettres de G, p à p et q à q admises par le groupe G. Toute substitution S de G qui remplace P_i par P_r , et Q_j par Q_j , remplace les lettres communes à P_i et Q_j par les lettres communes à P_r et Q_j . Si P_i et Q_j ont en commun r

lettres formant un système R_i ($r > 0$), les lettres communes à P_i et Q_j formeront un système R_2 de r lettres ayant toutes ses lettres communes ou n'en ayant aucune avec R_1 . G étant transitif, on pourra toujours trouver une substitution S remplaçant une lettre donnée a de R_1 par une lettre arbitraire b , et si S remplace P_i et Q_j par $P_{i'}$ et $Q_{j'}$, on voit que b fera partie d'un système R_k de r lettres formé des lettres communes à $P_{i'}$ et $Q_{j'}$. Les systèmes

$$R_1, R_2, \dots, R_k, \dots$$

contiendront toutes les lettres de G , seront toujours communs chacun à deux des systèmes P et Q et à deux seulement, et n'auront deux à deux une lettre commune que s'ils sont identiques.

En choisissant convenablement $\frac{N}{r}$, on aura donc une répartition des lettres de G , r à r , en systèmes de non-primitivité.

Si (P_i) , (Q_j) , (R_k) sont respectivement les groupes de substitutions qui permutent exclusivement entre elles les lettres d'un des systèmes P_i , Q_j , R_k , leurs ordres sont respectivement

$$(p) = p h_\alpha, \quad (q) = q h_\alpha, \quad (r) = r h_\alpha.$$

r étant évidemment diviseur commun de p et q , on a

$$p = \varpi r, \quad q = \chi r,$$

et si R_k est commun à P_i et Q_j , (R_k) est le groupe commun à (P_i) et (Q_j) .

Une répartition $R_1, R_2, \dots$ dont chaque système est contenu dans un des systèmes de $P_1, P_2, \dots$ et de $Q_1, Q_2, \dots$ est dite *commune* aux deux répartitions P et Q . Celle que nous avons formée plus haut est la *plus grande répartition commune* à P et Q .

S'il existe une répartition $S_1, S_2, \dots, S_g$ telle que chacun des systèmes S contienne un nombre exact de systèmes P et de systèmes Q , la répartition S sera dite *multiple de ces deux répartitions*.

Une substitution T de G qui remplace P_i par $P_{i'}$ remplace l'ensemble Σ_i des systèmes Q ayant des lettres communes avec P_i par l'ensemble $\Sigma_{i'}$ des systèmes Q ayant des lettres communes avec $P_{i'}$. Mais il s'en faut de beaucoup que les ensembles $\Sigma_i, \Sigma_{i'}, \dots$

qu'on obtiendrait en raisonnant comme précédemment sur les systèmes R forment toujours une répartition en systèmes de non-primitivité admise par G. Ces systèmes peuvent avoir deux à deux des lettres communes sans les avoir toutes.

Voici un exemple simple :

Le groupe régulier G d'ordre et de degré 60 isomorphe au groupe alterné de cinq éléments admet plusieurs répartitions de ses lettres cinq à cinq, sans quoi il serait composé ⁽¹⁾. Soient $P_1, P_2, \dots$ et $Q_1, Q_2, \dots$ les systèmes de deux de ces répartitions : deux des systèmes P et Q auront en commun r lettres, r divisant 5, d'après ce qui précède, avec $r < 5$: donc $r = 1$. L'ensemble Σ_1 des systèmes Q ayant des lettres communes avec P_1 contient 25 lettres et G n'admet pas de répartition de ses lettres 25 à 25.

Plus généralement, si θ^m est la plus haute puissance du nombre premier θ qui divise l'ordre g d'un groupe régulier G, et si G ne contient pas de sous-groupe invariant d'ordre θ^m , G admettra plusieurs répartitions de ses lettres θ^m à θ^m , et si $P_1, P_2, \dots$ et $Q_1, Q_2, \dots$ sont deux de ces répartitions, on verra encore que l'ensemble Σ_1 des systèmes Q ayant des lettres communes avec P_1 contient θ^n lettres avec $n \geq m + 1$, et G n'admet pas de répartition de ses lettres θ^n à θ^n .

Il pourra néanmoins se présenter des cas où deux quelconques des ensembles $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots$ n'ont aucune lettre commune s'ils ne les ont pas toutes. Alors $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots$ donnera une répartition des lettres de G, s à s . Σ_1 comprendra exactement ϖ systèmes Q et χ systèmes P. On voit, en effet, sans peine, que Σ_1 est formé de l'ensemble des systèmes P ayant des lettres communes avec Q_1 . Chacun des systèmes $Q_1, Q_2, \dots$ ayant des lettres communes avec P_1 , en aura le même nombre r , et

$$\varpi = \frac{p}{r}, \quad \chi = \frac{q}{r}, \quad s = \frac{pq}{r}.$$

L'ordre (s_k) du groupe des substitutions de G laissant invariable le système Σ_k est

$$(s_k) = sh_2 = \frac{pq}{r} h_2.$$

⁽¹⁾ Voir notre *Thèse de Doctorat*, p. 10.

(Σ_i) contient (P_i) et (Q_i) . (P_i) et (Q_i) n'ayant que rh_α substitutions communes, le groupe $[(P_i), (Q_i)]$ dérivé de $(P_i), (Q_i)$ est d'ordre $\geq \frac{pq}{r} h_\alpha = (s_i)$. Donc (P_i) et (Q_i) sont échangeables et leur produit est (Σ_i) .

Réciproquement, si l'on considère les deux systèmes P_i et Q_i ayant r lettres communes exactement, et si (P_i) et (Q_i) sont échangeables, l'ensemble Σ_i des systèmes Q ayant des lettres communes avec P_i donnera une répartition en systèmes Σ de $\frac{pq}{r}$ lettres admise par G . Il suffit, en effet, de considérer le groupe $(P_i) \times (Q_i)$ d'ordre $\frac{pq}{r} h_\alpha$ et la répartition correspondante admise par G .

Ceci posé, nous dirons par extension que *les deux répartitions P et Q sont échangeables* si les deux groupes (P_i) et (Q_i) le sont. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME I. — *Étant donné un groupe G transitif qui admet les deux répartitions en systèmes*

$$\begin{array}{l} P_1, P_2, \dots \\ Q_1, Q_2, \dots \end{array}$$

la condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble des systèmes Q ayant des lettres communes avec un même système P_i forme un système d'une répartition en systèmes de non-primitivité admise par G , c'est-à-dire pour que les deux répartitions P, Q soient échangeables, est que le groupe (P_i) soit échangeable à un des groupes (Q_j) . $(P_i), (Q_j)$ étant formés respectivement des substitutions qui laissent immobiles P_i et Q_j .

Nous nous proposons de considérer en particulier les groupes dont tous les sous-groupes sont deux à deux échangeables : soit G un pareil groupe d'ordre $g = p_1^{\alpha_1} \dots p_i^{\alpha_i} (p_1, \dots, p_i \text{ nombres premiers différents})$. G renferme un groupe H_i d'ordre $p_i^{\alpha_i}$: si H_i n'est pas invariant dans G , G renferme au moins deux sous-groupes distincts d'ordre $p_i^{\alpha_i}$ échangeables : le groupe dérivé serait d'ordre $p_i^{\beta_i}$ avec $\beta_i > \alpha_i$, ce qui est absurde.

On en conclut que deux sous-groupes d'ordre $p_k^{\alpha_k}, p_j^{\alpha_j} (k \neq j)$

de G sont tels que chacun est permutable aux substitutions de l'autre. Donc ⁽¹⁾ chacun a ses substitutions échangeables à celles de l'autre, et l'on a ce théorème :

THÉORÈME II. — *Un groupe G d'ordre $p_1^{a_1} \dots p_i^{a_i} (p_1, \dots, p_i$ nombres premiers distincts) et dont tous les sous-groupes sont échangeables est tel que toute substitution d'ordre p_k^m y est échangeable à toute substitution de G d'ordre premier à p_k . Ces groupes sont résolubles.*

Remarque. — Les groupes dont toutes les substitutions sont échangeables appartiennent à cette catégorie de groupes ⁽²⁾; mais celle-ci comprend d'autres groupes. C'est le cas du groupe A régulier d'ordre et de degré 27 dérivé des substitutions

$$\begin{cases} S = (123456789)(1'2'\dots9')(1''2''\dots9''), \\ T = (11'1'')(44'4'')(77'7'')(25'8')(2'5'8')(2''5''8'')(39'6'')(3'9'6'')(3''9''6''). \end{cases}$$

les éléments étant représentés par $1, 2, \dots, 9, 1', 2', \dots, 9', 1'', 2'', \dots, 9''$.

On a

$$\begin{aligned} T^{-1}ST &= S^2, \\ T^{-1}S^2T &= S^3. \end{aligned}$$

Ce groupe n'est pas formé de substitutions échangeables, et cependant deux quelconques de ses sous-groupes sont échangeables. On voit, en effet, que ST et ST^2 sont d'ordre 9 et que G renferme 18 substitutions d'ordre 9 et 8 d'ordre 3 formant un sous-groupe d'ordre 9 avec l'unité.

Nous verrons plus tard que les propriétés précédentes s'étendent d'une façon plus parfaite aux groupes de Lie.

⁽¹⁾ Voir, par exemple, *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. IX, 1895, D.17, théorème V.

⁽²⁾ Ces groupes comprennent les groupes appelés *hamiltoniens* par MM. Dedekind et Miller (*Comptes rendus*, 16 mai 1898); ils en comprennent d'autres, car A n'est pas hamiltonien.

Un résumé des résultats ci-dessus a été communiqué au Congrès de Boulogne pour l'avancement des Sciences. (Voir *Comptes rendus de l'Association française pour l'avancement des Sciences*, 1899.)

**SUR UNE CLASSE DE SURFACES ALGÈBRIQUES DONT LES COORDONNÉES
S'EXPRIMENT PAR DES FONCTIONS UNIFORMES DE DEUX PARAMÈTRES;**

Par M. ÉMILE PICARD.

1. Dans un Mémoire sur certaines transcendentes uniformes (*Journal de Mathématiques*, 1890), M. Poincaré s'est posé le problème suivant : Étant données une substitution rationnelle sur n variables

$$\begin{aligned} u'_1 &= R_1(u_1, u_2, \dots, u_n), \\ u'_2 &= R_2(u_1, u_2, \dots, u_n), \\ &\dots\dots\dots, \\ u'_n &= R_n(u_1, u_2, \dots, u_n), \end{aligned}$$

et une constante m de module supérieur à l'unité, rechercher si l'on peut trouver des fonctions $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ uniformes dans tout le plan et holomorphes dans le voisinage de $t = 0$ ⁽¹⁾, telles que l'on ait

$$\begin{aligned} f_1(mt) &= R_1[f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)], \\ f_2(mt) &= R_2[f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)], \\ &\dots\dots\dots, \\ f_n(mt) &= R_n[f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)]. \end{aligned}$$

Nous allons nous poser un problème analogue, en supposant que les R , au lieu d'être des fonctions rationnelles, sont des fonctions algébriques; nous nous bornons aux cas de deux lettres, et nous posons le problème de la manière suivante :

Soit une surface algébrique

$$F(x, y, z) = 0$$

admettant une transformation rationnelle en elle-même

$$(S) \quad \begin{cases} X = R_1(x, y, z), \\ Y = R_2(x, y, z), \\ Z = R_3(x, y, z), \end{cases}$$

⁽¹⁾ J'ai traité le même problème (*Acta mathematica*, tomes XVIII et XXIII), en supposant que le point $t = 0$ puisse être un point singulier essentiel des fonctions f . Le problème est alors d'une tout autre nature et beaucoup plus général. Certaines relations, qui doivent être vérifiées nécessairement dans le problème de M. Poincaré, n'ont plus besoin d'avoir lieu; je ne m'occupe ici que de fonctions f holomorphes autour de l'origine.

et supposons que cette transformation admette comme point *double* le point $x = 0, y = 0, z = 0$, point simple par hypothèse de la surface. Nous voulons chercher des fonctions uniformes

$$f(t), \quad \varphi(t), \quad \psi(t),$$

telles que

$$F[f(t), \varphi(t), \psi(t)] = 0$$

et que

$$f(mt) = R_1[f(t), \varphi(t), \psi(t)],$$

$$\varphi(mt) = R_2[f(t), \varphi(t), \psi(t)],$$

$$\psi(mt) = R_3[f(t), \varphi(t), \psi(t)].$$

2. Dans le voisinage de l'origine, la substitution S peut être mise sous la forme

$$X = ax + by + \dots,$$

$$Y = a'x + b'y + \dots;$$

les seconds membres étant des séries ordonnées suivant les puissances croissantes de x et y , et convergentes dans le voisinage de $x = y = 0$. En faisant une combinaison linéaire convenable de x et y , et écartant un cas exceptionnel, on peut supposer que

$$b = a' = 0,$$

et nous prenons alors la substitution S sous la forme

$$X = ax + \dots,$$

$$Y = b'y + \dots,$$

les termes non écrits étant de degrés supérieurs à un.

S'il existe des fonctions

$$(1) \quad \begin{cases} f(t) = At + \dots, \\ \varphi(t) = Bt + \dots, \end{cases}$$

holomorphes dans le voisinage de $t = 0$, et satisfaisant aux relations

$$f(mt) = af(t) + \dots,$$

$$\varphi(mt) = b'\varphi(t) + \dots,$$

et si A et B ne sont pas nuls tous deux, soit, par exemple, $A \neq 0$, il faudra que $m = a$. Nous nous plaçons dans ce cas, et il est clair que, si b' n'est pas égal à a , il faudra que B soit nul. *Le cas*

particulièrement intéressant pour nous est celui où

$$b' = a \ (|a| > 1)$$

et nous adoptons maintenant cette hypothèse.

3. Nous allons montrer que les équations

$$(2) \quad \begin{cases} f(at) = af(t) + \dots \\ \varphi(at) = a\varphi(t) + \dots \end{cases} \quad (\text{module de } a > 1),$$

où $f(t)$ et $\varphi(t)$ sont les fonctions holomorphes représentées par les développements (1), définissent complètement ces fonctions f et φ , quand on se donne arbitrairement A et B . On voit d'abord de suite que l'on pourra déterminer de proche en proche les coefficients des développements (1) à l'aide des équations (2); il faut voir si ces développements sont convergents pour $|t|$ suffisamment petit.

Nous y parviendrons indirectement en démontrant par une autre voie l'existence des fonctions cherchées; ce sera en procédant par approximations successives, comme je l'ai fait dans le cas beaucoup plus complexe où $t = 0$ était une singularité essentielle. Posons

$$f(t) = At + F(t), \quad \varphi(t) = Bt + \Phi(t),$$

nous avons les équations

$$(3) \quad \begin{cases} F(at) = aF(t) + P(t, F, \Phi), \\ \Phi(at) = a\Phi(t) + Q(t, F, \Phi), \end{cases}$$

où P et Q sont des séries entières en t, F et Φ , commençant par des termes du second degré par rapport à ces trois lettres. Nous allons obtenir des fonctions holomorphes F et Φ satisfaisant aux équations (3) et commençant par des termes au moins du second degré en t , en procédant de la manière suivante par approximations successives. On part de l'équation

$$\begin{aligned} F_1(at) &= aF_1(t) + P(t, 0, 0), \\ \Phi_1(at) &= a\Phi_1(t) + Q(t, 0, 0), \end{aligned}$$

qui détermine un couple de fonctions $F_1(t)$ et $\Phi_1(t)$ commençant par des termes au moins du second degré. On prend ensuite

l'équation

$$\begin{aligned} F_2(at) &= aF_2(t) + P(t, F_1, \Phi_1), \\ \Phi_2(at) &= a\Phi_2(t) + Q(t, F_1, \Phi_1). \end{aligned}$$

qui détermine un couple F_2, Φ_2 dans les mêmes conditions, et ainsi de suite on passe de F_{n-1}, Φ_{n-1} à F_n, Φ_n par les équations

$$\begin{aligned} F_n(at) &= aF_n(t) + P(t, F_{n-1}, \Phi_{n-1}), \\ \Phi_n(at) &= a\Phi_n(t) + Q(t, F_{n-1}, \Phi_{n-1}). \end{aligned}$$

Nous allons montrer que F_n et Φ_n ont des limites (pour $n = \infty$) fonctions holomorphes de t dans le voisinage de l'origine, et, par suite, les équations (2) admettront une solution de la forme (1) où A et B ont des valeurs données.

4. Il est clair qu'il suffira de faire le raisonnement dans le cas d'une seule fonction; nous considérerons donc une seule équation

$$(4) \quad F(at) = aF(t) + P(t, F).$$

P étant une série en t et F commençant par des termes du second degré en t et F.

Un lemme préliminaire va nous être utile. Envisageons l'équation

$$F(at) = aF(t) + R(t),$$

$R(t)$ étant une fonction holomorphe dans le cercle et sur la circonférence C de rayon ρ décrit autour de l'origine comme centre, et dont, en outre, le développement commence par un terme en t^2 , soit

$$R(t) = \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3 + \dots + \alpha_n t^n + \dots$$

On trouve de suite une fonction holomorphe

$$F(t) = \Lambda_2 t^2 + \Lambda_3 t^3 + \dots + \Lambda_n t^n + \dots$$

satisfaisant à la relation précédente, et l'on a

$$\Lambda_n = \frac{\alpha_n}{a^n - a}.$$

Si nous désignons par M le maximum du module de $R(t)$ sur la circonférence C, on aura

$$|\alpha_n| < \frac{M}{\rho^n},$$

et par suite, puisque $|a|$ est supérieur à l'unité, on aura à l'intérieur et sur la circonférence C

$$|F(t)| < k.M,$$

k étant un nombre positif qui dépend uniquement de a .

5. Revenons maintenant à l'équation (4) et aux équations successives envisagées au n° 3 :

$$F_n(at) = aF_n(t) + P(t, F_{n-1}) \quad (F_0 = 0).$$

Si, dans le cercle de rayon ρ , on a

$$|F_{n-1}(t)| < M_{n-1},$$

on aura évidemment, d'après le lemme précédent, en désignant par $p(t, F)$ ce que devient $P(t, F)$ quand on remplace chaque coefficient par son module,

$$M_n < k.p(\rho, M_{n-1}).$$

Il est aisé d'en conclure une limite supérieure pour M_n . Considérons, à cet effet, la transformation

$$(5) \quad x' = k.p(\rho, x).$$

Si ρ est suffisamment petit, l'équation

$$(6) \quad x = k.p(\rho, x)$$

a une racine voisine de zéro (elle est de l'ordre de ρ^2). De plus, la dérivée de

$$k.p(\rho, x)$$

pour cette racine est aussi très petite (de l'ordre de ρ); elle a donc un module moindre que l'unité. Par suite, d'après une proposition bien connue, la transformation (S), répétée un nombre infini de fois en partant de $x = 0$, tend vers une limite qui est la racine de l'équation (6), et nous pouvons écrire

$$|F_n(t)| < K,$$

K étant un nombre fixe qui est très petit quand ρ est très petit.

Ceci ne suffit pas encore à établir que $F_n(t)$ tend vers une

limite ; mais considérons l'équation

$$F_n(at) - F_{n-1}(at) = \alpha [F_n(t) - F_{n-1}(t)] + P(t, F_{n-1}) - P(t, F_{n-2}).$$

Or, d'après ce qui précède, on a manifestement

$$|P(t, F_{n-1}) - P(t, F_{n-2})| < \lambda \times \text{maximum de } |F_{n-1} - F_{n-2}|,$$

λ étant un nombre fixe, très petit si ρ est très petit. Donc, d'après le lemme du numéro précédent,

$$\text{Max. de } |F_n - F_{n-1}| < k \cdot \lambda. \quad \text{Max. de } |F_{n-1} - F_{n-2}|,$$

ces maxima étant, bien entendu, relatifs au cercle C de rayon ρ . Or, si ρ est très petit, on aura

$$k \cdot \lambda < 1,$$

puisque λ est très petit en même temps que ρ . On voit par suite que la série

$$F_1 + (F_2 - F_1) + \dots + (F_n - F_{n-1}) + \dots$$

est uniformément convergente dans le cercle de rayon ρ , si le rayon de ce cercle est assez petit, et nous avons alors établi que $F_n(t)$ converge uniformément vers une limite qui est une fonction holomorphe dans le cercle C.

6. Nous avons donc obtenu des fonctions satisfaisant aux conditions du n° 1, et qui se trouvent définies dans le cercle C, où elles sont holomorphes. Les relations

$$\begin{aligned} f(at) &= R_1[f(t), \varphi(t), \psi(t)], \\ \varphi(at) &= R_2[f(t), \varphi(t), \psi(t)], \\ \psi(at) &= R_3[f(t), \varphi(t), \psi(t)] \end{aligned}$$

permettent de faire de proche en proche l'extension des fonctions f, φ, ψ dans tout le plan, en passant successivement aux cercles de rayon $|a| \cdot \rho$, puis $|a^2| \cdot \rho$ et ainsi de suite. Ces fonctions seront méromorphes dans tout le plan, ayant seulement, en général, le point à l'infini comme point singulier essentiel.

7. Envisageons maintenant ces fonctions à un point de vue un peu différent. Elles dépendent de la variable t et de deux constantes A et B, et sont des fonctions méromorphes de ces trois lettres pour



toutes les valeurs finies. Mais il suffit de regarder chacune des approximations successives qui nous ont servi dans les démonstrations précédentes pour voir que f , φ et ψ sont en réalité des fonctions de At et Bt . Si donc on pose

$$At = u, \quad Bt = v,$$

les trois coordonnées x, y, z d'un point de la surface se trouveront exprimées par des fonctions uniformes des variables indépendantes u et v . Il n'est pas douteux que le déterminant fonctionnel de u et v soit différent de zéro, puisque dans le voisinage de $u = 0$, $v = 0$, on a les développements

$$\begin{aligned} x &= u + \dots, \\ y &= v + \dots, \end{aligned}$$

les termes non écrits étant de degrés supérieurs au premier en u et v .

Notre surface jouit donc de la propriété remarquable suivante : *Les coordonnées x, y, z d'un point de la surface peuvent s'exprimer par*

$$(E) \quad \begin{cases} x = f(u, v), \\ y = \varphi(u, v), \\ z = \psi(u, v), \end{cases}$$

les trois fonctions f, φ, ψ étant des fonctions méromorphes à distance finie des deux variables indépendantes u et v , et jouissant de la propriété exprimée par les identités

$$\begin{aligned} f(au, av) &= R_1[f(u, v), \varphi(u, v), \psi(u, v)], \\ \varphi(au, av) &= R_2[f(u, v), \varphi(u, v), \psi(u, v)], \\ \psi(au, av) &= R_3[f(u, v), \varphi(u, v), \psi(u, v)], \end{aligned}$$

qui se déduisent du remplacement de t par at .

8. Ici se posent plusieurs questions sur lesquelles j'appellerai l'attention plutôt que je ne les résoudrai. Tout d'abord les surfaces supposées existent-elles? Je veux dire : en dehors de certaines surfaces qui se présentent immédiatement. Les surfaces unicursales admettent évidemment une infinité de transformations rationnelles satisfaisant aux conditions requises. Il en est de même pour les surfaces se rattachant aux fonctions abéliennes, telles

que x, y, z s'expriment en fonctions abéliennes de deux paramètres U et V , de telle façon qu'à un point arbitraire de la surface ne corresponde qu'un seul système de valeurs de U et V , abstraction faite des multiples des périodes. En effet, à la transformation

$$(U, V; \quad mU, mV) \qquad (m \text{ entier})$$

correspond une transformation rationnelle de la forme S (on suppose que $U = 0, V = 0$ correspond à un point simple de la surface). Le nombre a est ici égal à l'entier m . En partant de la substitution S , l'application des considérations que nous venons de développer nous ramènerait précisément aux fonctions abéliennes.

L'existence étant admise de surfaces algébriques d'un type nouveau au point de vue d'une représentation paramétrique, une question d'une autre nature se poserait. *La représentation (E) atteint-elle tout point de la surface?* Il se pourrait *a priori* qu'à l'ensemble des valeurs de u et v correspondît seulement une portion de la surface.

9. Pour la première question posée, il semble au premier abord que les conditions imposées à la surface, relativement à la transformation rationnelle S , sont assez peu limitatives. Mais l'exemple des courbes algébriques nous montre qu'il ne faut pas se fier aux apparences. On pourrait se proposer pour les courbes un problème tout analogue à celui que nous avons étudié pour les surfaces, en supposant qu'une courbe

$$F(x, y) = 0$$

possède une transformation rationnelle en elle-même

$$(S)' \qquad \begin{cases} X = R_1(x, y), \\ Y = R_2(x, y), \end{cases}$$

ayant un point double à l'origine qui serait un point simple de la courbe, de telle sorte que $(S)'$ puisse ramener autour de l'origine à

$$X = ax + \dots,$$

le second membre étant une série entière en x , et les termes non

écrits étant de degrés supérieurs à un , avec la condition supplémentaire

$$|a| > 1.$$

Pour une telle courbe F , on aura, en raisonnant comme plus haut,

$$x = f(u), \quad y = \varphi(u),$$

f et φ étant des fonctions méromorphes de u dans tout le plan, qui satisfont aux relations

$$f(au) = R_1[f(u), \varphi(u)].$$

$$\varphi(au) = R_2[f(u), \varphi(u)].$$

Or, les courbes possédant une transformation $(S)'$ qui jouisse des propriétés requises *sont nécessairement du genre zéro ou un*. On peut le voir d'une manière élémentaire, et cela résulte aussi immédiatement d'une propriété générale que j'ai établie autrefois sur les fonctions uniformes d'une variable liées par une relation algébrique. On ne connaît malheureusement aucun théorème analogue relatif à des fonctions uniformes de deux variables, et les cas d'une représentation paramétrique pour une surface algébrique à l'aide de fonctions uniformes ne sont pas nombreux; en dehors des surfaces unicursales et des surfaces hyperelliptiques (avec leurs dégénérescences), je ne vois guère à citer que les surfaces hyperfuchsiennes et les surfaces hyperabéliennes. Il n'est pas impossible qu'une étude approfondie du type signalé dans les pages précédentes conduise à des découvertes intéressantes; c'est ce qui m'a engagé à publier les résultats que l'on vient de lire, quelque incomplets et même en un sens quelque hypothétiques qu'ils puissent être.

SUR QUELQUES PROBLÈMES RELATIFS A LA DISTRIBUTION DES NOMBRES PREMIERS;

Par M. E. LANDAU.

1. Le théorème, regardé comme exact depuis longtemps, que la somme des logarithmes des nombres premiers inférieurs à x est asymptotique à x , c'est-à-dire que son quotient par x tend, pour $x = \infty$, vers l'unité, a été démontré pour la première fois indé-

pendamment par M. Hadamard ⁽¹⁾ et par M. de la Vallée-Poussin ⁽²⁾, de même que le théorème plus général que la somme des logarithmes des nombres premiers q , inférieurs à x et compris dans une progression arithmétique déterminée de raison k (première au terme initial), est asymptotique à $\frac{x}{\varphi(k)}$.

Je désigne, dans ce qui suit, l'égalité asymptotique par le signe $\asymp$; j'entends, en outre, par $\{G(x)\}$ une fonction telle que son quotient par une fonction déterminée $G(x)$ tend, pour $x = \infty$, vers 0, et par $O[G(x)]$ une fonction telle que son quotient par $G(x)$ reste compris, pour $x = \infty$, entre deux limites finies; dans le cas particulier où elles coïncident, le quotient tend vers 0 ou vers une autre limite finie.

Les remarques qui forment le point de départ des pages suivantes se rattachent à la méthode employée par M. Hadamard pour arriver au résultat mentionné plus haut. M. Hadamard établit d'abord, pour $\mu > 1$, l'équation asymptotique

$$(1) \quad \frac{1}{\Gamma(\mu)} \sum_{q \leq x} \log q \log^{\mu-1} \frac{x}{q} \asymp \frac{x}{\varphi(k)}$$

et en déduit le théorème énoncé, qui correspond au cas $\mu = 1$. Mais il ne croit pas ⁽³⁾ que l'équation générale (1) puisse se déduire inversement de la relation correspondant à $\mu = 1$ et pose le problème de rechercher quels renseignements la relation générale (1) fournit sur l'erreur commise en remplaçant $\sum_{q \leq x} \log q$

par sa valeur asymptotique, c'est-à-dire sur l'ordre de grandeur de la différence

$$\sum_{q \leq x} \log q - \frac{x}{\varphi(k)}.$$

On verra cependant, dans la suite, qu'il est possible de déduire

⁽¹⁾ *Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques* (Bulletin de la Société mathématique, t. XXIV; 1896).

⁽²⁾ *Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers* (Annales de la Société scientifique de Bruxelles, t. XX, 2^e Partie; 1896).

⁽³⁾ *Loc. cit.*, p. 219.

l'équation asymptotique (1) de la seule équation

$$(2) \quad \sum_{q \leq x} \log q \sim \frac{x}{\varphi(k)},$$

de sorte qu'il faut donner à la question posée par M. Hadamard la réponse que l'équation (1) ne saurait fournir aucun renseignement sur la fonction $\sum_{q \leq x} \log q - \frac{x}{\varphi(k)}$, vu que l'équation (1) sub-

siste non seulement pour les nombres premiers de la progression arithmétique, mais aussi pour toute classe de nombres q satisfaisant à la seule condition que la somme des logarithmes de tous les nombres q inférieurs à x soit asymptotique à $\frac{x}{\varphi(k)}$.

Il suffit de considérer la suite naturelle des nombres au lieu d'une progression arithmétique quelconque; car, abstraction faite du facteur $\varphi(k)$ entrant dans toutes les formules, les considérations sont, dans le cas général, littéralement les mêmes.

2. Je pars donc de la relation

$$(3) \quad \mathfrak{S}(x) = \sum_{p \leq x} \log p \sim x$$

et je me propose d'en déduire

$$(4) \quad \sum_{p \leq x} \log p \log^{\mu-1} \frac{x}{p} \sim x \Gamma(\mu) \quad (\mu > 1),$$

où les sommes s'étendent à tous les nombres premiers qui ne sont pas supérieurs à x .

Déjà Tchebycheff a appliqué l'artifice de la sommation partielle, dû à Abel, à la considération de sommes étendues aux nombres premiers d'un intervalle donné. On se convainc facilement que les développements du septième Chapitre de son *Mémoire sur les nombres premiers* (1), de même que ceux de Hargreave (2) et de Polignac (3) sont, *mutatis mutandis*, valables aussi dans le cas

(1) *Journal de Mathématiques*, 1^{re} série, t. XVII, p. 382; 1852.

(2) *Analytical researches concerning numbers* (*Philosophical Magazine*, third series, t. XXXV, p. 49; 1849).

(3) *Recherches nouvelles sur les nombres premiers* (*Comptes rendus*, t. XLIX, p. 350; 1859).

que le terme général $F(v)$ de la somme dépend non seulement de v , mais aussi des limites de la sommation.

En combinant ces considérations avec le théorème (3), on obtient comme corollaire la proposition suivante :

Si une fonction réelle de deux arguments positifs $F(v, x)$ satisfait aux trois conditions suivantes :

$$1^{\circ} \quad F(v, x) \geq 0 \text{ pour } 1 \leq v \leq x,$$

$$2^{\circ} \quad \frac{F(v, x)}{\log v} \geq \frac{F(v', x)}{\log v'} \text{ pour } 2 \leq v \leq v' \leq x,$$

3^o en donnant à v une valeur déterminée quelconque,

$$F(v, x) = \left\{ \int_2^x \frac{F(u, x)}{\log u} du \right\},$$

ces conditions sont suffisantes pour pouvoir énoncer l'égalité asymptotique

$$\sum_{p \leq x} F(p, x) \sim \int_2^x \frac{F(u, x)}{\log u} du.$$

Démonstration. — En définissant une fonction $\varepsilon(x)$ au moyen de l'équation

$$\mathfrak{Z}(x) = \sum_{p \leq x} \log p = x + x\varepsilon(x)$$

[$\varepsilon(0)$ doit signifier 0], et en tenant compte de ce que

$$1 + v\varepsilon(v) - (v-1)\varepsilon(v-1) = \mathfrak{Z}(v) - \mathfrak{Z}(v-1) = \log v \text{ ou } 0,$$

suivant que le nombre v est premier ou composé, on a

$$\begin{aligned} \sum_{p \leq x} F(p, x) &= \sum_{v=2}^x \frac{\mathfrak{Z}(v) - \mathfrak{Z}(v-1)}{\log v} F(v, x) \\ &= \sum_{v=2}^x \frac{F(v, x)}{\log v} + \sum_{v=2}^x \frac{v\varepsilon(v) - (v-1)\varepsilon(v-1)}{\log v} F(v, x), \\ (5) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{p \leq x} F(p, x) &= \sum_{v=2}^x \frac{F(v, x)}{\log v} + \sum_{v=2}^{x-1} v\varepsilon(v) \left[\frac{F(v, x)}{\log v} - \frac{F(v+1, x)}{\log(v+1)} \right] \\ &\quad + x\varepsilon(x) \frac{F(x, x)}{\log x} + \frac{F(2, x)}{\log 2}. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Comme la fonction $\frac{F(v, x)}{\log v}$ va en décroissant si v augmente (deuxième hypothèse), on peut remplacer la somme $\sum_{v=2}^x \frac{F(v, x)}{\log v}$ par l'intégrale correspondante avec une erreur d'ordre

$$F(2, x) = \left\{ \int_2^x \frac{F(u, x)}{\log u} du \right\}$$

(troisième hypothèse). On a donc

$$\sum_{v=2}^x \frac{F(v, x)}{\log v} = \int_2^x \frac{F(u, x)}{\log u} du + \left\{ \int_2^x \frac{F(u, x)}{\log u} du \right\}.$$

Soit δ un nombre positif donné. On peut déterminer un nombre ϖ tel que, pour $v \geq \varpi$,

$$|\varepsilon(v)| < \frac{\delta}{2}.$$

Donc

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{v=2}^{x-1} v\varepsilon(v) \left[\frac{F(v, x)}{\log v} - \frac{F(v+1, x)}{\log(v+1)} \right] + x\varepsilon(x) \frac{F(x, x)}{\log x} \right| \\ & \leq \left| \sum_{v=2}^{\varpi-1} v\varepsilon(v) \left[\frac{F(v, x)}{\log v} - \frac{F(v+1, x)}{\log(v+1)} \right] \right| \\ & \quad + \frac{\delta}{2} \sum_{v=\varpi}^{x-1} \left[\frac{F(v, x)}{\log v} - \frac{F(v+1, x)}{\log(v+1)} \right] + \frac{\delta}{2} x \frac{F(x, x)}{\log x}. \end{aligned}$$

La première somme du second membre se compose d'un nombre fini de termes d'ordre inférieur à $\int_2^x \frac{F(u, x)}{\log u} du$ (troisième hypothèse); donc le second membre

$$\begin{aligned} & \leq \left\{ \int_2^x \frac{F(u, x)}{\log u} du \right\} + \frac{\delta}{2} \sum_{v=2}^x \frac{F(v, x)}{\log v} [v - (v-1)] \\ & = \left\{ \int_2^x \frac{F(u, x)}{\log u} du \right\} + \frac{\delta}{2} \int_2^x \frac{F(u, x)}{\log u} du, \end{aligned}$$

c'est-à-dire, pour x suffisamment grand,

$$\leq \frac{\delta}{2} \int_2^x \frac{F(u, x)}{\log u} du + \frac{\delta}{2} \int_2^x \frac{F(u, x)}{\log u} du = \delta \int_2^x \frac{F(u, x)}{\log u} du;$$

le quotient par $\int_1^x \frac{F(u, x)}{\log u} du$ tend donc, pour $x = \infty$, vers 0, et il résulte de (5) que

$$(6) \quad \sum_{p \leq x} F(p, x) = \int_1^x \frac{F(u, x)}{\log u} du + \left\{ \int_1^x \frac{F(u, x)}{\log u} du \right\},$$

ce qu'il fallait démontrer.

3. En prenant

$$F(v, x) = \log v \log^{\mu-1} \frac{x}{v},$$

on obtient

$$\sum_{p \leq x} \log p \log^{\mu-1} \frac{x}{p} \sim \int_1^x \log^{\mu-1} \frac{x}{u} du \sim \int_1^x \log^{\mu-1} \frac{x}{u} du,$$

d'où, en posant $x = ue^y$,

$$\begin{aligned} \sum_{p \leq x} \log p \log^{\mu-1} \frac{x}{p} &\sim x \int_{\log x}^0 e^{-y} y^{\mu-1} dy = x \int_0^{\log x} e^{-y} y^{\mu-1} dy \\ &= x \int_0^{\infty} e^{-y} y^{\mu-1} dy - x \int_{\log x}^{\infty} e^{-y} y^{\mu-1} dy = x \Gamma(\mu) + \{x\} \sim x \Gamma(\mu), \end{aligned}$$

ce qui constitue le théorème (4) de M. Hadamard.

4. Je résoudrai, dans ce qui suit, en n'appliquant pas d'autres ressources transcendantes que le théorème (3), le problème :

Trouver la valeur asymptotique du nombre $\pi_k(x)$ de tous les nombres inférieurs à x et composés de k nombres premiers, tous différents.

Ce problème a été énoncé par Hargreave (1), mais je crois qu'on ne s'en est pas occupé jusqu'à présent.

On a d'abord

$$\pi_1(x) = \pi(x) \sim \frac{x}{\log x};$$

cette égalité asymptotique a été déduite par M. von Mangoldt

(1) *Loc. cit.*, p. 53.

et par M. de la Vallée-Poussin (1) du théorème (3) et est, du reste, un cas particulier de (6), pour $F(v, x) = 1$.

$\pi_2(x)$ est égal au nombre des paires de nombres premiers p, q tels que

$$pq \leq x$$

et

$$p < q.$$

En ne tenant compte que de la première de ces deux inégalités, on obtient deux fois tout nombre pq si p et q sont différents et une fois tout nombre p^2 ; donc

$$2\pi_2(x) = \sum_{p \leq x} \pi\left(\frac{x}{p}\right) - \pi(\sqrt{x}),$$

identité connue.

On peut appliquer à la somme

$$\sum_{p \leq x} \pi\left(\frac{x}{p}\right)$$

la proposition du n° 2, ce qui donne

$$\sum_{p \leq x} \pi\left(\frac{x}{p}\right) \sim \int_1^x \frac{\pi\left(\frac{x}{u}\right)}{\log u} du = \int_1^{\frac{x}{2}} \frac{\pi\left(\frac{x}{u}\right)}{\log u} du$$

[car $\pi\left(\frac{x}{u}\right) = 0$ pour $u > \frac{x}{2}$]. Soit δ une grandeur positive donnée; ϖ étant convenablement choisi, on a, pour $\frac{x}{u} \geq \varpi$, c'est-à-dire pour $u \leq \frac{x}{\varpi}$,

$$\left| \pi\left(\frac{x}{u}\right) - \frac{x}{u(\log x - \log u)} \right| \leq \delta \frac{x}{u(\log x - \log u)},$$

donc

$$\begin{aligned} & \left| \int_1^{\frac{x}{\varpi}} \frac{\pi\left(\frac{x}{u}\right)}{\log u} du - x \int_1^{\frac{x}{\varpi}} \frac{du}{u \log u (\log x - \log u)} \right| \\ & \leq \int_1^{\frac{x}{\varpi}} \frac{du}{\log u} \left| \pi\left(\frac{x}{u}\right) - \frac{x}{u(\log x - \log u)} \right| \leq \delta x \int_1^{\frac{x}{\varpi}} \frac{du}{u \log u (\log x - \log u)}. \end{aligned}$$

(1) VON MANGOLDT, *Über eine Anwendung der Riemannschen Formel für die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse* (*Journal de Crelle*, t. 119, p. 65-71; 1898).

Or

$$\begin{aligned} & \log x \int_1^{\frac{x}{\varpi}} \frac{du}{u \log u (\log x - \log u)} \\ &= \int_1^{\frac{x}{\varpi}} \left(\frac{1}{\log u} + \frac{1}{\log x - \log u} \right) d \log u \\ &= [\log \log u - \log (\log x - \log u)]_1^{\frac{x}{\varpi}} \\ &= \log \log \frac{x}{\varpi} - \log \log \varpi - \log \log 2 + \log \log \frac{x}{2} \\ &= 2 \log \log x + O(1), \end{aligned}$$

et

$$\int_{\frac{x}{\varpi}}^{\frac{x}{2}} \frac{\pi\left(\frac{x}{u}\right)}{\log u} du \leq \pi(\varpi) \int_{\frac{x}{\varpi}}^x \frac{du}{\log u} \leq \pi(\varpi) \operatorname{Li}(x) = O\left(\frac{x}{\log x}\right);$$

donc

$$\begin{aligned} \int_1^{\frac{x}{2}} \frac{\pi\left(\frac{x}{u}\right)}{\log u} du &= \int_1^{\frac{x}{\varpi}} \frac{\pi\left(\frac{x}{u}\right)}{\log u} du + \int_{\frac{x}{\varpi}}^{\frac{x}{2}} \frac{\pi\left(\frac{x}{u}\right)}{\log u} du \\ &= \frac{2x \log \log x}{\log x} + \left\{ \frac{x \log \log x}{\log x} \right\}, \end{aligned}$$

d'où, en tenant compte de ce que

$$\pi(\sqrt{x}) = O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log x}\right),$$

$$(7) \quad \pi_2(x) \sim \frac{x \log \log x}{\log x}.$$

En suivant ce chemin, on parvient au théorème

$$(8) \quad \pi_k(x) \sim \frac{1}{(k-1)!} \frac{x (\log \log x)^{k-1}}{\log x}.$$

Je suppose qu'il soit déjà démontré pour les valeurs 1, 2, ..., k et je l'établirai pour k + 1.

Chacun des $\pi_{k+1}(x)$ nombres composés de k + 1 nombres premiers, tous différents, peut être mis, de k + 1 manières, sous la forme p.n, p désignant un nombre premier; n sera composé de k nombres premiers, tous différents entre eux et différents de p. Donc

$$(9) \quad (k+1) \pi_{k+1}(x) = \sum_{p \leq x} \pi_k\left(\frac{x}{p}\right) - q(x),$$

où $q(x)$ désigne le nombre des nombres inférieurs à x et qui contiennent $k-1$ nombres premiers une seule fois et un $k^{\text{ième}}$ deux fois. On a, comme $\pi_{k-1}\left(\frac{x}{p^2}\right)$ égale 0 pour $p > \sqrt{\frac{x}{2}}$,

$$\begin{aligned} q(x) &= O \sum_{p \leq \sqrt{\frac{x}{2}}} \pi_{k-1}\left(\frac{x}{p^2}\right) = O \int_1^{\sqrt{\frac{x}{2}}} \frac{\pi_{k-1} \frac{x}{u^2}}{\log u} du \\ &= O \int_1^{\sqrt{\frac{x}{2}}} \frac{x (\log \log x)^{k-2}}{u^2 (\log x - 2 \log u)} \frac{du}{\log u} \\ &= x (\log \log x)^{k-2} O \int_1^{\sqrt{\frac{x}{2}}} \frac{du}{u^2 \log u (\log x - 2 \log u)}. \end{aligned}$$

Or, si l'on pose $u = \frac{1}{v}$, cette intégrale

$$\begin{aligned} &= - \int_{\sqrt{\frac{x}{2}}}^{\frac{1}{2}} \frac{dv}{\log v (\log x + 2 \log v)} \\ &= - \frac{1}{\log x} \int_{\sqrt{\frac{x}{2}}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\log v} - \frac{2}{\log x + 2 \log v} \right) dv \\ &= - \frac{1}{\log x} \left(\int_{\sqrt{\frac{x}{2}}}^{\frac{1}{2}} \frac{dv}{\log v} - \frac{1}{\sqrt{x}} \int_{\sqrt{\frac{x}{2}}}^{\frac{1}{2}\sqrt{x}} \frac{dw}{\log w} \right) \\ &= O\left(\frac{1}{\log x}\right) + \frac{1}{\sqrt{x} \log x} O\left(\text{Li} \frac{1}{2} \sqrt{x}\right) = O\left(\frac{1}{\log x}\right). \end{aligned}$$

Donc

$$q(x) = O \left[\frac{x (\log \log x)^{k-2}}{\log x} \right],$$

ce qui est d'ordre inférieur à $\pi_k(x)$ et, *a fortiori*, à $\pi_{k+1}(x)$. L'équation (9) donne donc

$$(k+1) \pi_{k+1}(x) \asymp \sum_{p \leq x} \pi_k\left(\frac{x}{p}\right) \asymp \int_1^x \frac{\pi_k\left(\frac{x}{u}\right)}{\log u} du \asymp \int_1^{\frac{x}{a}} \frac{\pi_k\left(\frac{x}{u}\right)}{\log u} du.$$

α désignant une constante quelconque ('). Comme dans le cas spécial $k = 2$ traité plus haut, on commet une erreur asymptotiquement inférieure à la valeur de l'intégrale en remplaçant

$$\pi_k\left(\frac{x}{u}\right)$$

par

$$\frac{1}{(k-1)!} \frac{x [\log(\log x - \log u)]^{k-1}}{u(\log x - \log u)}.$$

Donc

$$(10) \quad (k-1)! (k+1) \pi_{k+1}(x) \sim x \int_2^{\frac{x}{a}} \frac{[\log(\log x - \log u)]^{k-1} d \log u}{\log u (\log x - \log u)}.$$

α doit être pris $\geq e$, pour que $\log(\log x - \log u)$ soit ≥ 0 .

Il faut maintenant calculer la valeur asymptotique de cette intégrale qui, en mettant

$$\log x = \xi, \quad \log u = \eta,$$

se transforme en

$$\int_{\log 2}^{\xi - \log a} \frac{\log^{k-1}(\xi - \eta)}{\eta(\xi - \eta)} d\eta.$$

En prenant $a = e$ et en remplaçant la limite inférieure par 1, on ne commet qu'une erreur d'ordre $\frac{(\log \log x)^{k-1}}{\log x}$. Or,

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_1^{\xi-1} \frac{\log^{k-1}(\xi - \eta)}{\eta(\xi - \eta)} d\eta \\ &= \frac{1}{\xi} \int_1^{\xi-1} \frac{\log^{k-1}(\xi - \eta)}{\xi - \eta} d\eta + \frac{1}{\xi} \int_1^{\xi-1} \frac{\log^{k-1}(\xi - \eta)}{\eta} d\eta. \end{aligned} \right.$$

La première de ces deux intégrales s'évalue directement :

$$(12) \quad \int_1^{\xi-1} \frac{\log^{k-1}(\xi - \eta)}{\xi - \eta} d\eta = \frac{1}{k} [-\log^k(\xi - \eta)]_1^{\xi-1} = \frac{1}{k} \log^k(\xi - 1).$$

(') Car la différence de ces deux intégrales est d'ordre

$$\int_{\frac{x}{a}}^x \frac{du}{\log u} = O\left(\frac{x}{\log x}\right)$$

et les intégrales mêmes sont d'ordre plus élevé.

On trouve la valeur asymptotique de la seconde en tenant compte de ce que

$$\int_{\frac{\xi}{2}}^{\xi} \frac{\log^{k-1}(\xi - \eta)}{\eta} d\eta = \log^{k-1} \xi O \int_{\frac{\xi}{2}}^{\xi} \frac{d\eta}{\eta} = O(\log^{k-1} \xi),$$

et que, pour $\eta \leq \frac{\xi}{2}$,

$$\begin{aligned} \log^{k-1}(\xi - \eta) &= \left[\log \xi + \log \left(1 - \frac{\eta}{\xi} \right) \right]^{k-1} = [\log \xi + O(1)]^{k-1} \\ &= \log^{k-1} \xi + O(\log^{k-2} \xi); \end{aligned}$$

on obtient

$$(13) \quad \left(\begin{aligned} &\int_1^{\xi-1} \frac{\log^{k-1}(\xi - \eta)}{\eta} d\eta \\ &= \log^{k-1} \xi \int_1^{\frac{\xi}{2}} \frac{d\eta}{\eta} + \log^{k-2} \xi O \int_1^{\frac{\xi}{2}} \frac{d\eta}{\eta} + O(\log^{k-1} \xi) \\ &= \log^k \xi + O(\log^{k-1} \xi). \end{aligned} \right)$$

De (10), (11), (12), (13), on conclut

$$\begin{aligned} (k-1)! (k+1) \pi_{k+1}(x) &\asymp \frac{x}{\log x} \left(\frac{1}{k} + 1 \right) (\log \log x)^k, \\ \pi_{k+1}(x) &\asymp \frac{1}{k!} \frac{x (\log \log x)^k}{\log x}, \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

5. L'erreur commise, en remplaçant, dans les hypothèses du n°2, la somme

$$\sum_{p \leq x} F(p, x)$$

par sa valeur asymptotique, peut être appréciée, avec plus ou moins de succès, au moyen du théorème récemment établi par M. de la Vallée-Poussin (1), que

$$\varepsilon(x) = O(e^{-a\sqrt{\log x}}),$$

a désignant une constante positive.

(1) Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et le nombre des nombres premiers inférieurs à une limite donnée (*Mémoires couronnés et autres Mémoires publiés par l'Académie royale de Belgique*, t. LIX, p. 54; 1899).

On tire de (5)

$$\begin{aligned} \sum_{p \leq x} F(p, x) &= \int_2^x \frac{F(u, x)}{\log u} du \\ &+ O[F(2, x)] + O \sum_{v=2}^{x-1} v e^{-a\sqrt{\log v}} \left[\frac{F(v, x)}{\log v} - \frac{F(v+1, x)}{\log(v+1)} \right] \\ &- O[x e^{-a\sqrt{\log x}} F(x, x)]. \end{aligned}$$

Pour

$$F(v, x) = 1,$$

on a

$$\begin{aligned} \sum_{v=2}^{x-1} v e^{-a\sqrt{\log v}} \left[\frac{1}{\log v} - \frac{1}{\log(v+1)} \right] &= \sum_{v=2}^{x-1} e^{-a\sqrt{\log v}} \frac{v \log \left(1 + \frac{1}{v} \right)}{\log v \log(v+1)} \\ &< \sum_{v=2}^{x-1} e^{-a\sqrt{\log v}} \cdot \frac{1}{v} < \sum_{v=1}^x e^{-a\sqrt{\log v}} = O \int_1^x e^{-a\sqrt{\log v}} dv \\ &= O(x e^{-a\sqrt{\log x}}). \end{aligned}$$

L'erreur commise en remplaçant le nombre $\pi(x)$ des nombres premiers $\leq x$ par le logarithme intégral

$$\text{Li}(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\int_0^{1-\delta} \frac{du}{\log u} + \int_{1+\delta}^x \frac{du}{\log u} \right)$$

est donc

$$O(x e^{-a\sqrt{\log x}}).$$

Ce résultat n'est pas nouveau; il a été établi par M. de la Vallée-Poussin dans le cinquième Chapitre de son Mémoire cité (1); mais les développements précédents font voir que, le théorème

$$\sum_{p \leq x} \log p = x + O(x e^{-a\sqrt{\log x}})$$

une fois établi, on n'a pas besoin de remonter à la théorie de la fonction $\zeta(s)$ pour démontrer que

$$\pi(x) = \text{Li}(x) + O(x e^{-a\sqrt{\log x}}).$$

(1) *Loc. cit.*, p. 63.

Pour la fonction désignée plus haut par $\pi_k(x)$, on obtient, par la même méthode,

$$(14) \quad \pi_k(x) = \frac{1}{(k-1)!} \frac{x(\log \log x)^{k-1}}{\log x} + O\left[\frac{x(\log \log x)^{k-2}}{\log x}\right] \quad (1).$$

La même formule (14) donne aussi la valeur asymptotique du nombre $\rho_k(x)$ des nombres $\leq x$ qui sont divisibles par k nombres premiers différents pouvant être affectés d'exposants supérieurs à 1, de même que celle du nombre $\sigma_k(x)$ des nombres $\leq x$ qui sont composés de k nombres premiers, les facteurs multiples étant comptés selon leur degré de multiplicité.

En effet, ceci est évident pour $k=1$, où les deux fonctions $\sigma_1(x)$ et $\pi_1(x)$ coïncident, tandis que $\rho_1(x) - \pi_1(x)$ est le nombre des solutions de

$$p^m \leq x \quad (m \geq 1),$$

donc d'ordre $\frac{\sqrt{x}}{\log x}$.

Supposons que le théorème soit déjà démontré pour les indices 1, 2, ..., k ; il s'agit de l'établir pour l'indice $k+1$. Vu que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sigma_{k+1}(x) - \pi_{k+1}(x) \leq \rho_1(x) + \rho_2(x) + \dots + \rho_k(x) \\ &= O\left[\frac{x(\log \log x)^{k-1}}{\log x}\right] \end{aligned}$$

(car tout nombre composé de $k+1$ facteurs premiers, pas tous différents, en a 1 ou 2, ..., ou k différents), il suffit de le prouver pour $\rho_{k+1}(x)$. Tout nombre divisible par $k+1$ nombres premiers, dont un au moins est affecté d'un exposant supérieur à 1, est de la forme

$$n = p^\alpha m \leq x,$$

où $\alpha \geq 2$ et où m est un nombre composé de k nombres premiers différents entre eux, mais affectés d'exposants quelconques. Or, le

(1) Pour $k=1$, le théorème de M. de la Vallée-Poussin donne l'approximation plus grande

$$\pi_1(x) = \text{Li}(x) + O(xe^{-\sqrt{\log x}}) = \frac{x}{\log x} + O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right).$$

nombre des solutions de

$$p^x \leq \frac{x}{m} \quad (x \geq 2)$$

est

$$\rho_1\left(\frac{x}{m}\right) - \pi_1\left(\frac{x}{m}\right),$$

donc, *a fortiori*,

$$= O\sqrt{\frac{x}{m}}.$$

Par conséquent,

$$0 \leq \rho_{k+1}(x) - \pi_{k+1}(x) = O \sum_m \sqrt{\frac{x}{m}} = \sqrt{x} O \sum_m \frac{1}{\sqrt{m}}.$$

Le nombre des valeurs que m peut prendre :

$$= \rho_k(x) = O \left[\frac{x(\log \log x)^{k-1}}{\log x} \right].$$

Donc

$$\begin{aligned} \sum_m \frac{1}{\sqrt{m}} &= \sum_{v=1}^x \frac{\rho_k(v) - \rho_k(v-1)}{\sqrt{v}} = \sum_{v=1}^x \rho_k(v) \left[\frac{1}{\sqrt{v}} - \frac{1}{\sqrt{v+1}} \right] + \frac{\rho_k(x)}{\sqrt{x+1}} \\ &= O \sum_{v=1}^x \frac{v(\log \log v)^{k-1}}{\log v} \cdot \frac{1}{v^{\frac{3}{2}}} + O \left[\frac{\sqrt{x}(\log \log x)^{k-1}}{\log x} \right] \\ &= O \int_1^x \frac{(\log \log u)^{k-1}}{\log u} \frac{du}{\sqrt{u}} + O \left[\frac{\sqrt{x}(\log \log x)^{k-1}}{\log x} \right] \\ &= O \left[\frac{\sqrt{x}(\log \log x)^{k-1}}{\log x} \right]; \end{aligned}$$

par conséquent,

$$\begin{aligned} \rho_{k+1}(x) &= \pi_{k+1}(x) + O \left[\frac{x(\log \log x)^{k-1}}{\log x} \right] \\ &= \frac{1}{k!} \frac{x(\log \log x)^k}{\log x} + O \left[\frac{x(\log \log x)^{k-1}}{\log x} \right], \end{aligned}$$

ce qui prouve que le second membre de l'équation (14) représente aussi les valeurs des fonctions $\rho_k(x)$ et $\sigma_k(x)$ pour de grands arguments.

**SUR LES PROPRIÉTÉS MÉTRIQUES D'UNE CERTAINE CORRESPONDANCE (1,1)
ENTRE CUBIQUES FOCALES;**

Par M. R. BRICARD.

I.

On sait qu'étant données deux cubiques planes, sans points doubles, la condition nécessaire et suffisante pour que l'on puisse établir entre ces courbes une correspondance (1, 1) est qu'elles possèdent même invariant absolu.

Quand il en est ainsi, les coordonnées de leurs points peuvent s'exprimer au moyen de fonctions elliptiques construites sur les mêmes périodes, et il existe *deux* infinités simples de transformation birationnelles changeant l'une des cubiques en l'autre, les arguments de deux points correspondants satisfaisant à l'une des relations

$$u = v + k, \quad u + v = k',$$

où k et k' désignent des constantes arbitraires.

Nous dirons que les correspondances ainsi définies sont respectivement de *première espèce* et de *deuxième espèce*. Une correspondance d'espèce quelconque est définie par la donnée d'un couple de points homologues.

(Quand les fonctions elliptiques introduites admettent certaines multiplications complexes, on sait qu'il existe encore entre les deux courbes des correspondances (1, 1) ne dépendant d'aucun paramètre arbitraire, et que l'on peut combiner avec les précédentes. Nous laisserons de côté ce cas exceptionnel) ⁽¹⁾.

Ces propriétés classiques étant rappelées, considérons deux cubiques C et C_1 , ayant même invariant absolu, entre lesquelles nous établirons une correspondance (1, 1) en nous donnant un couple de points homologues, a et a_1 , situés respectivement sur C et C_1 . Soient ab , ac , ad , ae , les quatre tangentes que l'on peut mener à C par le point a , outre la tangente en a , et b , c , d , e ,

⁽¹⁾ Voir APPELL et GOURSAT, *Traité des fonctions algébriques*, p. 474-476.

leurs points de contact. Soient de même a, b_1, a, c_1 , etc., les éléments analogues relatifs à C_1 . Par hypothèse, les deux faisceaux $a(bcde), a_1(b_1c_1d_1e_1)$ ont même rapport anharmonique.

Opérons sur chacune des cubiques une transformation homographique (différente pour les deux), telle que les points d, e , ainsi que les points d_1, e_1 , aillent se confondre avec les points cycliques. Nos deux cubiques deviennent ainsi des cubiques focales, c'est-à-dire des cubiques contenant leur foyer singulier. Ces deux cubiques focales ayant même invariant absolu, l'angle des deux tangentes non isotropes que l'on peut mener à l'une par son foyer singulier (*angle focal*) et l'angle analogue relatif à l'autre cubique sont égaux. Enfin, de la correspondance $(1, 1)$ établie entre C et C_1 dérive entre les deux cubiques focales une correspondance $(1, 1)$ telle que les foyers singuliers des deux courbes soient des points homologues.

C'est l'étude de cette correspondance particulière que nous nous proposons d'approfondir. Plusieurs des résultats que nous obtiendrons peuvent s'étendre, par homographie, aux correspondances $(1, 1)$ les plus générales. Mais les plus intéressants ont un caractère métrique et s'énonceraient difficilement en langage projectif.

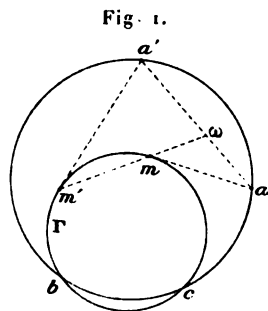
II.

Considérons donc deux cubiques focales C et C' ayant le même angle focal. En transformant par similitude la cubique C' , nous pouvons évidemment faire en sorte que les points de contact des tangentes non isotropes, menées à cette cubique par son foyer non singulier, viennent se confondre avec les points analogues relatifs à la cubique C : nous supposons que les deux courbes sont dans cette situation relative. Soient a et a' leurs foyers singuliers, b et c les points de contact des tangentes non isotropes menées par a à C , ou par a' à C' . Les angles bac et $ba'c$ étant égaux, les quatre points a, a', b, c sont sur un cercle.

C est le lieu des points de contact des tangentes menées du point a aux cercles qui passent par les points b et c . Rappelons en deux mots la démonstration de cette propriété connue : on voit immédiatement que le lieu en question est une cubique qui passe au point a , aux points b et c et aux points cycliques,

les tangentes en ces quatre derniers points passant par le point a . Cette cubique se confond donc nécessairement avec C . C' peut être définie d'une façon analogue.

Soient alors (fig. 1) Γ un cercle quelconque passant aux points b



et c , m et m' les points de contact de deux tangentes à Γ menées respectivement par les points a et a' .

Les points m et m' appartiennent respectivement aux cubiques C et C' . Je dis que si l'on fait varier le cercle Γ , la droite mm' passe par un point fixe. Considérons, en effet, les deux cercles (am) et $(a'm')$ ayant respectivement pour centres a et a' , et pour rayons am et $a'm'$. Ces deux cercles sont coupés orthogonalement aux points m et m' par le cercle Γ . Les points m et m' sont donc antihomologues sur les cercles (am) et $(a'm')$, et la droite mm' passe par l'un des centres de similitude ω de ces deux cercles.

Or le point ω divise le segment aa' dans un rapport égal à $\frac{am}{a'm'}$, et, d'après une propriété bien connue des cercles passant par deux points fixes, ce rapport est constant quand on fait varier le cercle Γ . Le point ω est donc fixe, comme nous l'avions annoncé. On peut remarquer que c'est le point de contact avec aa' de l'un des deux cercles Γ qui sont tangents à cette droite.

Il est clair d'après cela que les points m et m' sont en correspondance $(1, 1)$. Si l'on amène le cercle Γ à se confondre avec le cercle $(aa'bc)$, on voit que les points a et a' sont homologues.

Nous obtenons une correspondance analogue en remplaçant le point ω par ω' , point de contact de l'autre cercle Γ tangent à la droite aa' . Les points a et a' sont encore homologues. Nous avons donc obtenu, nécessairement, les deux correspondances

(1, 1), respectivement de première espèce et de deuxième espèce, entre les cubiques C et C', et telles que les points a et a' soient homologues.

Il n'y a évidemment pas lieu de chercher à distinguer l'espèce de chacune de ces correspondances, tant qu'on ne précise pas la représentation des points des cubiques au moyen des fonctions elliptiques : on peut, en effet, changer le signe de l'argument correspondant à un point de l'une des deux courbes. Une correspondance de première espèce devient ainsi de seconde espèce, et inversement.

Nous avons déjà remarqué que le rapport $\frac{am}{a'm'}$ est constant. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Étant données deux cubiques focales ayant le même angle focal, si l'on établit entre ces deux courbes l'une des deux correspondances (1, 1) telles que les foyers singuliers a et a' soient homologues, on a, en désignant par m et m' deux points homologues quelconques, la relation

$$\frac{am}{a'm'} = \text{const.}$$

III.

Nous allons établir une autre propriété métrique remarquable de la même correspondance.

Rappelons d'abord que, étant donnée une cubique quelconque, on appelle *couple steinérien* un couple de points appartenant à cette courbe, tels que les tangentes en ces points aillent de nouveau rencontrer la cubique au même point. Les arguments elliptiques des deux points d'un couple steinérien diffèrent d'une demi-période, et, comme il y a trois demi-périodes ω_1 , ω_2 et ω_3 , on peut distinguer sur une cubique *trois familles de couples steinériens*.

Sur une cubique focale, les points cycliques forment un couple steinérien. Nous ne considérerons que les couples steinériens appartenant à la même famille que les points cycliques.

Cela posé, nous énoncerons le théorème suivant, en conservant les désignations du paragraphe précédent :

Soient m et μ deux points fixes constituant un couple steinérien sur la cubique C , m' et μ' leurs homologues sur la cubique C' , et enfin p et p' deux points homologues quelconques sur les deux cubiques. On a la relation

$$\frac{pm}{p\mu} = \frac{n'm'}{p'\mu'}.$$

Pour établir cette propriété, nous emploierons la considération des points *associés*, due à M. Darboux ⁽¹⁾ : si m et μ sont deux points quelconques, on appelle *points associés* des précédents les deux points n et ν , centres des cercles de rayon nul passant par les points m et μ . La propriété fondamentale des points associés est la suivante : p étant un point quelconque du plan, on a l'égalité

$$\frac{pm}{p\mu} = e^{i \widehat{np\nu}}.$$

L'énoncé de la proposition à démontrer peut donc être transformé ainsi qu'il suit :

Soient n et ν les deux points associés à m , μ , et n' , ν' les deux points associés à m' , μ' . On a

$$\widehat{np\nu} = \widehat{n'p'\nu'}.$$

Supposons, pour fixer les idées, que la correspondance $(1, 1)$ établie entre les deux cubiques soit de première espèce. Une démonstration toute pareille à celle que nous allons donner s'appliquera au cas de la correspondance de seconde espèce.

Nous supposerons aussi les fonctions elliptiques, introduites pour la représentation paramétrique des deux cubiques, telles que la collinéation de trois points de l'une d'elles s'exprime en égalant à zéro la somme de leurs arguments (il en est ainsi, par exemple, lorsqu'on exprime les coordonnées d'un point en fonctions rationnelles de pu et $p'u$ par la méthode classique). Enfin, nous désignerons l'argument d'un point par la lettre même qui sert à désigner ce point.

(1) DARBOUX, *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques*, p. 61 et suiv.

On a ainsi, k désignant une constante :

$$\begin{aligned} a' &= a + k, & p' &= p + k, \\ m' &= m + k, & \mu' &= \mu + k, \end{aligned}$$

et aussi les égalités exprimant que (m, μ) et (m', μ') forment deux couples steinériens, respectivement sur C et C' :

$$\mu = m + \omega_1, \quad \mu' = m' + \omega_1.$$

Les arguments des points cycliques sur la cubique C s'obtiennent immédiatement si l'on écrit que les tangentes en ces points passent au point a et qu'ils constituent un couple steinérien de la même famille que (m, μ) . On trouve ainsi les valeurs

$$-\frac{a}{2}, \quad -\frac{a}{2} + \omega_1.$$

(On pourrait prendre aussi $-\frac{a}{2} + \omega_2$ et $-\frac{a}{2} + \omega_3$; cela ne changerait rien au raisonnement.)

De même, sur la cubique C' , les points cycliques ont pour arguments respectifs

$$-\frac{a}{2} - \frac{k}{2}, \quad -\frac{a}{2} - \frac{k}{2} + \omega_1.$$

Joignons le point m au point cyclique $(-\frac{a}{2})$, et le point μ au point cyclique $(-\frac{a}{2} + \omega_1)$. Ces deux droites rencontrent C en un même point ayant pour argument

$$n = \frac{a}{2} - m \equiv \frac{a}{2} - \omega_1 - (m + \omega_1). \quad (\text{mod } 2\omega_1).$$

De même, les deux droites $(m, -\frac{a}{2} + \omega_1)$ et $(\mu, -\frac{a}{2})$ se coupent sur C , au point d'argument

$$v = \frac{a}{2} - m + \omega_1.$$

Ainsi, les points n et v , associés des points m et μ , appartiennent à C et y constituent un couple steinérien. On a un fait analogue pour les points n' et v' , dont les arguments sur C' sont

$$n' = \frac{a}{2} - \frac{k}{2} - m, \quad v' = \frac{a}{2} - \frac{k}{2} - m + \omega_1,$$

En résumé, si l'on appelle r et ρ les arguments des points cycliques sur C , r' et ρ' leurs arguments sur C' , on a les égalités

$$\begin{aligned} r' &= r - \frac{k}{2}, & \rho' &= \rho - \frac{k}{2}, \\ n' &= n - \frac{k}{2}, & v' &= v - \frac{k}{2}. \end{aligned}$$

Or, si l'on considère deux points u et u' décrivant respectivement les cubiques C et C' , leurs arguments étant reliés par la relation

$$u' = u - \frac{k}{2},$$

les droites pu et $p'u'$ engendrent deux faisceaux homographiques.

En effet, donnons-nous la droite pu , elle rencontre C aux deux points u et

$$u_1 = -p - u.$$

A ces points correspondent sur la cubique C' les deux points

$$u' = u - \frac{k}{2}, \quad u'_1 = -p - u - \frac{k}{2},$$

qui sont en ligne droite avec le point p' , en vertu de la relation

$$\left(u - \frac{k}{2}\right) + \left(-p - u - \frac{k}{2}\right) + (p + k) = 0.$$

Ainsi, à une droite pu ne correspond qu'une droite $p'u'$, et réciproquement, ce qui établit l'homographie des faisceaux engendrés par ces deux droites.

En appliquant cette remarque, on voit que

$$p(n \vee r \rho) = p'(n' \vee' r' \rho'),$$

ou bien

$$\widehat{npv} = \widehat{n'p'v'}.$$

C. Q. F. D.

IV.

Nous passons maintenant à l'étude d'une liaison remarquable qui existe entre la théorie des cubiques focales et celle du quadrilatère articulé.

Soient encore C et C' deux cubiques focales ayant même angle focal, mais non semblables; m, μ et p, ϖ , deux couples steiné-riens sur la cubique C; m', p' et p', ϖ' , les points homologues des précédents dans l'une des correspondances (1, 1) établies entre les deux courbes et telles que les foyers singuliers soient homologues.

D'après ce que nous avons démontré, on a

$$\frac{mp}{m'p'} = \frac{m\varpi}{m'\varpi'} = \frac{\mu p}{\mu'p'} = \frac{\mu\varpi}{\mu'\varpi'}.$$

Les deux quadrilatères $mp\mu\varpi$ et $m'p'\mu'\varpi'$ ont donc leurs côtés proportionnels, mais ils ne sont pas semblables, sans quoi les deux cubiques C et C₁ le seraient aussi (¹).

Si donc on fait varier la forme de la cubique C', en lui conservant toujours le même angle focal, le quadrilatère $m'p'\mu'\varpi'$ prendra toutes les formes possibles d'un quadrilatère dont les quatre côtés sont assujettis seulement à conserver un rapport constant.

On peut donc énoncer la réciproque suivante :

Si deux quadrilatères ont leurs côtés proportionnels, les deux cubiques focales, lieux des foyers des coniques inscrites dans chacun de ces quadrilatères, ont même angle focal, c'est-à-dire même invariant absolu.

En particulier, on peut supposer que les quadrilatères ont leurs côtés égaux, et l'on a une propriété remarquable du quadrilatère articulé.

On voit donc que les propriétés des cubiques focales se relient intimement à celles du quadrilatère articulé, ainsi que nous le disions plus haut.

C'est un fait que nous allons préciser davantage dans le paragraphe suivant.

V.

Considérons toujours la représentation paramétrique de la cu-

(¹) En effet, le quadrilatère $mp\mu\varpi$ définit sans ambiguïté la cubique C, qui est, comme l'on sait, le lieu des foyers des coniques inscrites à ce quadrilatère.

bique C au moyen des fonctions elliptiques (il est inutile d'écrire des formules explicites).

Proposons-nous d'abord d'exprimer la distance d'un point m quelconque de cette courbe au foyer singulier a.

Le carré de cette distance, $\overline{am}^2$, est une fonction elliptique de l'argument m . Déterminons l'ordre de cette fonction elliptique : à cet effet, cherchons le nombre des points m de la cubique tels que l'on ait

$$\overline{am}^2 = R^2,$$

R étant une longueur donnée. Cela revient à chercher le nombre des points d'intersection *variables avec* R de la cubique et d'un cercle ayant pour centre a et pour rayon R . Or un tel cercle est tangent à la cubique en chacun des points cycliques et coupe cette courbe en deux autres points. Ainsi la fonction elliptique $\overline{am}^2$ est du second ordre.

Cette fonction a évidemment un zéro double en a , et un pôle double en $a + \omega_1$. On en conclut immédiatement son expression

$$\overline{am}^2 = \frac{A^2}{p(m - a) - e_1} = A^2 \sigma_{01}^2(m - a),$$

A désignant une longueur qui dépend de la cubique C.

On peut extraire les racines carrées, ce qui donne

$$(1) \quad am = A \sigma_{01}(m - a).$$

On est ainsi conduit à attribuer un signe à la distance am .

Remarquons en passant que cette formule conduit immédiatement au théorème énoncé à la fin du § II. On a en effet, en conservant les notations de ce paragraphe,

$$a'm' = A' \sigma_{01}(m' - a'),$$

A' étant une nouvelle longueur constante. Mais, par hypothèse,

$$m' - a' = m - a.$$

On a donc bien

$$\frac{a'm'}{am} = \frac{A'}{A} = \text{const.}$$

Prenons maintenant deux points m et n sur la cubique C , et cherchons à évaluer l'angle man .

Appelons toujours r et ρ les points cycliques, situés respectivement sur les droites isotropes de coefficients angulaires $+i$ et $-i$, et désignons pour un instant par (pq) le coefficient angulaire d'une droite pq . On a, par la formule de Laguerre,

$$e^{2i\widehat{man}} = a(mnr\rho) = \frac{(an) - (ar)}{(an) - (a\rho)} \frac{(am) - (a\rho)}{(am) - (ar)},$$

en explicitant le rapport anharmonique.

Si, les points a et m restant fixes, on fait varier le point n sur la cubique, ce rapport anharmonique, que nous désignerons par t , est une fonction elliptique de l'argument n . Cette fonction est encore du second ordre : en effet, t étant donné, le point n se trouve à l'intersection de la cubique et d'une droite donnée passant par le point a .

Il suffit d'examiner l'expression développée de t pour avoir les zéros et les pôles de cette fonction elliptique : il y a un zéro double, $-\frac{a}{2}$, et un pôle double, $-\frac{a}{2} + \omega_1$. On en conclut immédiatement

$$t = \frac{k_m}{p\left(n + \frac{a}{2}\right) - e_1} = k_m \sigma_{01}^2 \left(n + \frac{a}{2}\right),$$

k_m étant fonction de m seulement. Pour obtenir l'expression de k_m , remarquons que t doit se réduire à l'unité pour $n = m$, quel que soit m .

On trouve ainsi

$$t = e^{2i\widehat{man}} = \frac{\sigma_{01}^2 \left(n + \frac{a}{2}\right)}{\sigma_{01}^2 \left(m + \frac{a}{2}\right)}.$$

Ici encore, on peut extraire les racines carrées, et l'on a finalement

$$e^{i\widehat{man}} = \frac{\sigma_{01} \left(n + \frac{a}{2}\right)}{\sigma_{01} \left(m + \frac{a}{2}\right)},$$

d'où

$$(2) \quad 2 \cos \widehat{man} = \frac{\sigma_{01} \left(n + \frac{a}{2} \right)}{\sigma_{01} \left(m + \frac{a}{2} \right)} + \frac{\sigma_{01} \left(m + \frac{a}{2} \right)}{\sigma_{01} \left(n + \frac{a}{2} \right)}.$$

Des formules (1) et (2), qui sont d'une simplicité remarquable, nous allons déduire le théorème suivant :

Considérons une cubique focale C qui varie en conservant le même angle focal. Entre cette cubique et une cubique focale fixe C₀, ayant aussi le même angle focal, établissons une correspondance (1, 1) telle que les foyers singuliers des deux courbes soient homologues. Si m, n, p sont trois points de C, homologues de trois points fixes de C₀, les distances mutuelles de ces points satisfont à une relation

$$(3) \quad \alpha \overline{mn}^2 + \beta \overline{nl}^2 + \gamma \overline{lm}^2 = 0,$$

où α, β, γ sont des constantes.

Écrivons en effet l'expression de $\overline{mn}^2$:

$$\overline{mn}^2 = \overline{am}^2 + \overline{an}^2 - 2am \cdot an \cos \widehat{man},$$

ou, d'après les formules (1) et (2),

$$\begin{aligned} \overline{mn}^2 = & \Lambda^2 \left\{ \sigma_{01}^2 (m - a) + \sigma_{01}^2 (n - a) \right. \\ & \left. - \sigma_{01} (m - a) \sigma_{01} (n - a) \left[\frac{\sigma_{01} \left(n + \frac{a}{2} \right)}{\sigma_{01} \left(m + \frac{a}{2} \right)} + \frac{\sigma_{01} \left(m + \frac{a}{2} \right)}{\sigma_{01} \left(n + \frac{a}{2} \right)} \right] \right\}. \end{aligned}$$

(On évite toute difficulté relative aux signes, en remarquant que $\overline{mn}^2$ doit s'annuler pour $n = m$.) On a de même les expressions de $\overline{nl}^2$ et de $\overline{lm}^2$.

Quand la cubique C varie dans les conditions indiquées, les différences

$$l - a = \lambda, \quad m - a = \mu, \quad n - a = \nu$$

restent constantes. Remplaçons dans les expressions de $\overline{mn}^2$,

$\overline{nl}^2$, $\overline{lm}^2$, l par $a + \lambda$, etc., et posons

$$\frac{3a}{2} = x.$$

Il vient ainsi

$$\begin{aligned}\overline{mn}^2 &= A^2 \left\{ \sigma_{01}^2 \mu + \sigma_{01}^2 \nu - \sigma_{01} \mu \sigma_{01} \nu \left[\frac{\sigma_{01}(\nu + x)}{\sigma_{01}(\mu + x)} + \frac{\sigma_{01}(\mu + x)}{\sigma_{01}(\nu + x)} \right] \right\}, \\ \overline{nl}^2 &= A^2 \left\{ \sigma_{01}^2 \nu + \sigma_{01}^2 \lambda - \sigma_{01} \nu \sigma_{01} \lambda \left[\frac{\sigma_{01}(\lambda + x)}{\sigma_{01}(\nu + x)} + \frac{\sigma_{01}(\nu + x)}{\sigma_{01}(\lambda + x)} \right] \right\}, \\ \overline{lm}^2 &= A^2 \left\{ \sigma_{01}^2 \lambda + \sigma_{01}^2 \mu - \sigma_{01} \lambda \sigma_{01} \mu \left[\frac{\sigma_{01}(\mu + x)}{\sigma_{01}(\lambda + x)} + \frac{\sigma_{01}(\lambda + x)}{\sigma_{01}(\mu + x)} \right] \right\}.\end{aligned}$$

On voit que $\frac{\overline{mn}^2}{A^2}$, $\frac{\overline{nl}^2}{A^2}$, $\frac{\overline{lm}^2}{A^2}$ sont des fonctions elliptiques de x , aux périodes $2\omega_1$ et $2\omega_2$. Il en est de même de l'expression

$$\varphi(x) = \alpha \frac{\overline{mn}^2}{A^2} + \beta \frac{\overline{nl}^2}{A^2} + \gamma \frac{\overline{lm}^2}{A^2},$$

α , β , γ étant des constantes. Cherchons s'il est possible de choisir les coefficients de telle manière que $\varphi(x)$ se réduise à une constante : Pour cela, il faut et il suffit que $\varphi(x)$ ne puisse devenir infini.

Or $\varphi(x)$ a six pôles de premier ordre, donnés par

$$x = -\lambda, \quad -\mu, \quad -\nu, \quad -\lambda + \omega_1, \quad -\lambda + \omega_2, \quad -\lambda + \omega_3.$$

Égalons à zéro les parties principales de $\varphi(x)$ pour $x = -\lambda$ et pour $x = -\lambda + \omega_1$. On a

$$-\beta \sigma_{01} \nu \sigma_{01} \lambda \sigma_{01}(\nu - \lambda) - \gamma \sigma_{01} \lambda \sigma_{01} \mu \sigma_{01}(\mu - \lambda) = 0,$$

et

$$-\frac{\beta \sigma_{01} \nu \sigma_{01} \lambda}{\sigma_{01}(\nu - \lambda + \omega_1)} - \frac{\gamma \sigma_{01} \lambda \sigma_{01} \mu}{\sigma_{01}(\mu - \lambda + \omega_1)} = 0,$$

égalité qui se confond avec la précédente, en vertu de la relation connue

$$\sigma_{01} u \sigma_{01}(u + \omega_1) = \sqrt{(e_2 - e_1)(e_3 - e_1)}.$$

On écrira de même deux égalités analogues, exprimant que les parties principales de $\varphi(x)$ en ses autres pôles sont nulles aussi. Les trois conditions obtenues se réduisent à deux, et l'on a finalement le résultat suivant :

Si l'on donne à α, β, γ les valeurs

$$\alpha = \frac{\sigma_{01}\lambda}{\sigma_{01}(\mu - \nu)}, \quad \beta = \frac{\sigma_{01}\mu}{\sigma_{01}(\nu - \lambda)}, \quad \gamma = \frac{\sigma_{01}\nu}{\sigma_{01}(\lambda - \mu)},$$

la fonction $\varphi(x)$ se réduit à une constante, qui est nulle, comme on le voit en faisant $x = 0$.

La relation (3) est donc démontrée.

On peut retrouver, au moyen de cette relation, un système articulé, découvert par M. Hart, et dont l'étude a été approfondie par MM. Kempe et Darboux (1).

Supposons que la cubique C varie en conservant le même angle focal, son paramètre de grandeur étant tel à chaque instant que les côtés du quadrilatère $mp\mu\omega$ (notations du § IV) aient des longueurs constantes.

Soit s un quatrième point de la cubique C, homologue d'un point fixe s_0 de la cubique C_0 . On a, d'après ce qui précède, la relation à coefficients constants

$$\overline{\alpha sm}^2 + \overline{\beta sp}^2 + \overline{\gamma mp}^2 = 0,$$

ou

$$\overline{\alpha sm}^2 + \overline{\beta sp}^2 = \text{const.},$$

ce qui montre (théorème de Stewart) que le point s reste à distance invariable d'un certain point du côté mp , fixe sur ce côté.

La même chose peut se répéter des autres côtés du quadrilatère $mp\mu\omega$. Ainsi :

Étant donné un quadrilatère $mp\mu\omega$, et s étant un point de la cubique, lieu du foyer des coniques inscrites à ce quadrilatère, on peut relier ce point par des tiges de longueurs invariables à des points convenablement choisis sur les côtés du quadrilatère, et fixes sur ces côtés; on forme ainsi un système déformable.

C'est là le système étudié par les géomètres cités plus haut, qui d'ailleurs l'ont généralisé comme on peut le voir en se reportant aux Mémoires de M. Darboux.

(1) Voir le Mémoire de M. DARBOUX dans le t. III, 2^e série, du *Bulletin des Sciences mathématiques*.

SUR UNE APPLICATION DES FONCTIONS ELLIPTIQUES;

Par M. le comte DE SPARRE.

Pour résoudre le problème du mouvement d'un projectile lorsque la résistance du milieu est proportionnelle au cube de la vitesse, MM. Appell et Lacour (*Principes de la théorie des fonctions elliptiques*, p. 232) ont donné des développements suivant les puissances ascendantes positives et entières de u . Nous nous proposons de démontrer que le rayon de convergence de ces séries n'est pas très considérable. Nous emploierons les notations du *Précis* de M. L. Lévy, p. 121 à 133.

1° La quantité ν (page 124 du *Précis*) définie par les équations

$$p(\nu) = \frac{1}{3}, \quad p'(\nu) = \frac{1}{3} \sin \varphi,$$

satisfait aux inégalités

$$(1) \quad \omega_1 < \nu < \frac{4\omega_1}{3}.$$

En effet ν étant supposé réel, positif et plus petit que $2\omega_1$, est plus grand que ω_1 puisque $p'(\nu)$ est positif (nous supposons φ positif).

De plus ν étant réel et compris entre ω_1 et $2\omega_1$, pour prouver que $\nu < \frac{4\omega_1}{3}$ il suffit de faire voir que

$$p(\nu) < p\left(\frac{4\omega_1}{3}\right).$$

Or

$$2\frac{4\omega_1}{3} = \frac{8\omega_1}{3} = 4\omega_1 - \frac{4\omega_1}{3},$$

d'où

$$p\left(2\frac{4\omega_1}{3}\right) = p\left(\frac{4\omega_1}{3}\right).$$

Par suite la formule (84)

$$p(2u) + 2p(u) = \frac{1}{4} \frac{p'^2(u)}{p^2(u)} = \frac{9p'^4(u)}{4p^3(u) - g_3}$$

Donc en remplaçant g_3 par sa valeur

$$p\left(\frac{4\omega_1}{3}\right) = \sqrt[3]{g_3} = \frac{1}{3} \sqrt[3]{4 - 3 \sin^2 \varphi} > \frac{1}{3} = p(v)$$

Donc

$$v < \frac{4\omega_1}{3},$$

et la seconde des inégalités (1) est démontrée;

2° Les séries qui donnent le développement de g et t suivant les puissances entières et ascendantes de u sont convergentes tant que le module de u est inférieur au module du zéro de la fonction

$$p'(v) - p'(u)$$

dont le module est minimum.

Or les zéros de cette fonction sont donnés par les formules

$$\begin{aligned} v + m(\omega_1 + \omega_2) + n(\omega_1 - \omega_2), \\ \alpha v + m'(\omega_1 + \omega_2) + n'(\omega_1 - \omega_2), \\ \alpha^2 v + m''(\omega_1 + \omega_2) + n''(\omega_1 - \omega_2), \end{aligned}$$

où α est une racine cubique imaginaire de l'unité et m, m', m'', n, n', n'' des entiers quelconques.

Mais si l'on remplace α par sa valeur et si l'on tient compte que, dans le cas actuel, $\omega_2 = \omega_1 i\sqrt{3}$, ces zéros pourront s'écrire

$$(2) \quad v + (2m - p)\omega_1 + p\omega_1 i\sqrt{3},$$

$$(3) \quad (2m' + p')\omega_1 - \frac{v}{2} + \left(\frac{v}{2} - p'\omega_1\right)i\sqrt{3},$$

$$(4) \quad (2m'' - p'')\omega_1 - \frac{v}{2} + \left(p''\omega_1 - \frac{v}{2}\right)i\sqrt{3},$$

où p, p', p'' sont aussi des entiers quelconques.

Pour les zéros (2) le carré du module est

$$(5) \quad [\nu + (2m - p)\omega_1]^2 + 3p^2\omega_1^2.$$

Mais on déduit des inégalités (1)

$$\omega_1 > 2\omega_1 - \nu > \frac{2\omega_1}{3},$$

et ceci fait voir que l'expression (5) sera minima pour $p = 0$, $m = -1$. Le module est alors égal à $2\omega_1 - \nu$.

Pour les zéros (3) et (4) les carrés des modules sont

$$(6) \quad \left[(2m' + p')\omega_1 - \frac{\nu}{2}\right]^2 + 3\left(p'\omega_1 - \frac{\nu}{2}\right)^2,$$

$$(7) \quad \left[(2m'' - p'')\omega_1 - \frac{\nu}{2}\right]^2 + 3\left(p''\omega_1 - \frac{\nu}{2}\right)^2.$$

On déduit d'ailleurs des inégalités (1)

$$\frac{\omega_1}{2} < \frac{\nu}{2} < \frac{2\omega_1}{3},$$

et par suite

$$(8) \quad \frac{\omega_1}{3} < \omega_1 - \frac{\nu}{2} < \frac{\omega_1}{2} < \frac{\nu}{2}.$$

Ces dernières inégalités font voir que l'expression (6) est minima pour $m' = 0$, $p' = 1$ et l'expression (7) pour $m'' = 1$, $p'' = 1$.

Elles sont alors égales l'une et l'autre à $4\left(\omega_1 - \frac{\nu}{2}\right)^2$.

Le minimum du module des zéros (3) et (4) est donc encore $2\left(\omega_1 - \frac{\nu}{2}\right) = 2\omega_1 - \nu$. Donc les séries qui nous occupent ne sont convergentes que jusqu'à la valeur $u = 2\omega_1 - \nu$.

Mais on a

$$p(2\omega_1 - \nu) = p(\nu) = \frac{1}{3}.$$

$$p'(2\omega_1 - \nu) = -p'(\nu) = -\frac{1}{3} \sin \varphi.$$

On aura par suite (formule u' , p. 124)

$$p = \frac{2}{\sin \varphi - 3p'(u)} = \frac{1}{\sin \varphi}.$$

D'ailleurs si θ est l'angle de la tangente à la trajectoire avec ox , on a (*fig. 1*)

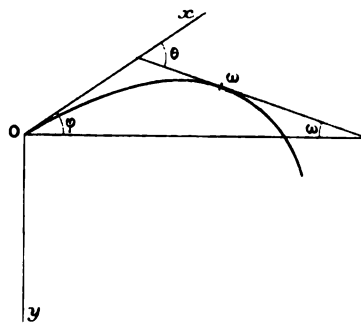
$$\text{tang } \theta = \frac{p \cos \varphi}{1 - p \sin \varphi},$$

donc dans le cas actuel on aura

$$\theta = \frac{\pi}{2}.$$

Si donc ω désigne l'inclinaison de la tangente en valeur absolue,

Fig. 1.



on aura $\omega = \theta - \varphi$, donc dans le cas actuel

$$\omega = \frac{\pi}{2} - \varphi.$$

Donc, en résumé, les séries deviennent divergentes pour le point situé au delà du sommet où l'inclinaison de la tangente est $\frac{\pi}{2} - \varphi$ (φ étant l'inclinaison de la tangente au point de vitesse infini). Si l'on remarque que les séries ont en général une convergence trop faible pour pouvoir être utilement employées, bien avant leur point de divergence, on voit que les séries de MM. Appell et Lacour seront rarement utilisables, dès que le tir aura lieu sous un angle un peu considérable, surtout si la vitesse initiale n'est pas grande.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 20 DÉCEMBRE 1899.

PRÉSIDENCE DE M. POINCARÉ.

Communications :

M. André : *Sur le théorème des fonctions homogènes.*

M. Landau : *Observations sur un Mémoire de M. Hadamard.*

M. RIPERT fait la Communication suivante :

Sur des propriétés générales des formes quadratiques;

1. Nous désignons par $\varphi_n(x, y, \dots, s)$ une forme quadratique homogène à n variables (ou n -aire), par Δ_n son discriminant, par ψ_n sa forme adjointe.

La loi de formation des formes φ_n est *exclusivement* la suivante :

$$\varphi_1(x) = Ax^2, \quad \varphi_2(x, y) = \varphi_1 + (2B'xy + A'y^2),$$

$$\varphi_3(x, y, z) = \varphi_2 + (2B'xz + 2Byz + A''z^2),$$

$$\varphi_4(x, y, z, t) = \varphi_3 + (2C'xt + 2C'y't + 2C''zt + Dt^2), \quad \dots$$

2. On a, *spécialement pour la forme ternaire* φ_3 ,

$$(1) \quad \begin{cases} 4\varphi_3(a, b, c)\varphi_3(a', b', c') - (a'\varphi'_a + b'\varphi'_b + c'\varphi'_c)^2 \\ \equiv 4\psi_3(bc' - cb', ca' - ac', ab' - ba'); \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} \varphi_3(a, b, c)\psi_3(u, v, w) - \Delta_3(au + bv + cw)^2 \\ \equiv \frac{1}{4}\varphi_3(v\varphi'_c - w\varphi'_b, w\varphi'_a - u\varphi'_c, u\varphi'_b - v\varphi'_a) \\ \equiv \frac{1}{4\Delta_3}\psi_3(b\psi'_w - c\psi'_v, c\psi'_u - a\psi'_w, a\psi'_v - b\psi'_u); \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} 4\psi_3(u, v, w)\psi_3(u', v', w') - (u'\psi'_u + v'\psi'_v + w'\psi'_w)^2 \\ \equiv 4\Delta_3\varphi_3(vw' - wv', wu' - uw', uv' - vu'). \end{cases}$$

Ces identités, qui se démontrent en développant, n'ont plus de signification pour $n \neq 3$, car, en posant $N = \frac{n(n-1)}{2}$, il est facile de voir que, dans les seconds membres, des formes N -aires se-

raient nécessaires. Nous nous proposons de leur faire subir les transformations nécessaires pour qu'elles deviennent vraies, quel que soit n .

3. On a

$$\begin{aligned}\varphi_3(X, Y, Z) &= \Sigma A X^2 + 2 \Sigma B Y Z, \\ \psi_3(X, Y, Z) &= \Sigma (A' A'' - B^2) X^2 + 2 \Sigma (B' B'' - AB) YZ,\end{aligned}$$

et, à cause de $n = N = 3$, ces formes φ_3 et ψ_3 sont identiques aux suivantes :

$$(4) \quad \xi_N(X, Y, Z) = \Sigma \delta_{A'A''}^2 X^2 + 2 \Sigma \delta_{B'B''}^2 YZ,$$

$$(5) \quad \chi_N(X, Y, Z) = \Sigma \delta_{[A'A'']}^{n-2} X^2 + 2 \Sigma \delta_{[B'B'']}^{n-2} YZ,$$

où $\delta_{A'A''}^2 = A$, $\delta_{B'B''}^2 = B$ sont les mineurs du deuxième ordre de $\Delta_{n=3}$ obtenus en différentiant successivement Δ_3 par rapport à (A', A'') ou (B', B'') , et où $\delta_{[A'A'']}^{n-2} = A' A'' - B^2$ et $\delta_{[B'B'']}^{n-2} = B' B'' - AB$ sont les mineurs d'ordre $n - 2 (= 1)$, obtenus en différentiant $\Delta_{n=3}$ par rapport à A ou $2B$, c'est-à-dire *par rapport à tous les coefficients de $\varphi_{n=3}$ d'espèces A ou B autres que ceux (A', A'') ou (B', B'') marqués par les indices*. On a d'ailleurs

$$\Delta_{n=3} = A A' A'' + 2 B B' B'' + \dots = \delta_{A'A''}^2 \delta_{[A'A'']}^{n-2} + \delta_{B'B''}^2 \delta_{[B'B'']}^{n-2} + \dots$$

Ceci posé, pour $n \neq 3$, on peut toujours former, d'après la loi (4)(5) indiquée, les formes N -aires ξ_N et χ_N , qui deviennent alors entièrement distinctes de φ_n et ψ_n et l'on peut les appeler les *premières formes auxiliaires de φ_n* ; dans ces conditions, les *identités*

$$(I) \quad \begin{cases} 4 \varphi_n(a, b, c, d, \dots) \varphi_n(a', b', c', d', \dots) - \Sigma^2 a' \varphi_a' \\ \equiv 4 \chi_N(bc' - cb', ca' - ac', ab' - ba', ad' - da', bd' - db', cd' - dc', \dots) \end{cases}$$

$$(II) \quad \begin{cases} \varphi_n(a, b, \dots) \psi_n(u, v, \dots) - \Delta_n \Sigma^2 au \\ \equiv \frac{1}{4} \xi_N(v \varphi_c' - w \varphi_b', \dots) \equiv \frac{1}{4 \Delta_n} \chi_N(b \psi_w' - c \psi_v', \dots), \end{cases}$$

$$(III) \quad 4 \psi_n(u, v, \dots) \psi_n(u', v', \dots) - \Sigma^2 u' \psi_u' \equiv 4 \Delta_n \xi_N(vw' - wv', \dots)$$

sont *générales*. On les démontre en les vérifiant successivement pour les formes monaire, binaire, ternaire, quaternaire, ... et appliquant le principe de continuité.

4. Au lieu de partir des formes ternaires, partons des formes quaternaires (n° 4) :

$$\begin{aligned}\varphi_4(X, Y, Z, T) &= \Sigma A X^2 + 2 \Sigma B YZ & \begin{bmatrix} A \dots D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \dots C' \end{bmatrix}, \\ \psi_4(X, Y, Z, T) &= \Sigma a X^2 + 2 \Sigma b YZ & \begin{bmatrix} a \dots d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \dots c'' \end{bmatrix},\end{aligned}$$

et posons $M = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$. A cause de $n = M = 4$, les formes φ_4 et ψ_4 sont identiques aux suivantes :

$$(6) \quad \pi_M(X, Y, Z, T) = \Sigma \delta_{A'A'D}^2 X^2 + 2 \Sigma \delta_{B'B'D}^2 YZ,$$

$$(7) \quad \rho_M(X, Y, Z, T) = \Sigma \delta_{A'A'D}^{n-2} X^2 + 2 \Sigma \delta_{B'B'D}^{n-2} YZ,$$

où les notations s'expliquent comme au numéro précédent, la correspondance des mineurs résultant de l'égalité

$$\begin{aligned}\Delta_n &= A A' A'' D D' \dots + 2 B B' B'' D D' \dots \\ &= \delta_{A'A'D}^2 \delta_{A'A'D}^{n-2} + \delta_{B'B'D}^2 \delta_{B'B'D}^{n-2} + \dots\end{aligned}$$

où $D, D', \dots$ sont des coefficients d'espèce A .

Pour $n \neq 4$, les formes π_M et ρ_M , entièrement distinctes de φ_n et φ_n , mais formées d'après la loi (6)(7), pourront être dites les *deuxièmes formes auxiliaires* de la forme φ_n .

Il est facile de généraliser en partant successivement de $\varphi_3, \varphi_6, \dots$. D'une manière générale, en posant $J = \frac{n(n-1)\dots(n-p)}{(p+1)!}$, on pourra, par ces procédés, faire correspondre à une forme φ_n , deux $p^{\text{ièmes}}$ *formes auxiliaires* σ_j et τ_j .

Ces formes et les identités auxquelles elles donnent lieu ont des applications importantes en Géométrie à n dimensions. Nous nous réservons de revenir sur ce sujet.

M. ANDRADE adresse la Note suivante :

Sur l'équation fonctionnelle de Poisson.

I. On sait que l'équation fonctionnelle de Poisson condense en un seul et même problème : la théorie des fonctions circulaires, la Statique et la recherche des propriétés métriques dans les trois Géométries euclidiennes ou non euclidiennes.

Cette équation fonctionnelle vise la recherche d'une fonction *continue* $F(x)$ qui satisfait à l'identité

$$(1) \quad F(x+y) + F(x-y) = 2 F(x) F(y),$$

avec la condition

$$(2) \quad F(0) = 1.$$

Habituellement on suppose que la fonction $F(x)$ est analytique, et l'on dérive deux fois par rapport à x , puis par rapport à y , l'identité (1); la comparaison des identités obtenues montre alors que la fonction F doit satisfaire à l'équation différentielle

$$\frac{d^2 F}{dx^2} = \frac{1}{K} F(x) \quad (K \text{ désignant une constante}).$$

Si alors on remarque que la fonction F , satisfaisant à (1), est nécessairement une fonction paire, on achève aisément la détermination de F et l'on trouve que la fonction F est, suivant que K est nul, positif ou négatif, de l'une ou l'autre des trois formes :

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} F = 1, \\ F(x) = \frac{\frac{x}{e\sqrt{K}} + e^{-\frac{x}{\sqrt{K}}}}{2} \quad \text{si } K > 0. \\ F(x) = \frac{\frac{ix}{e\sqrt{-K}} + e^{-\frac{ix}{\sqrt{-K}}}}{2} \quad \text{si } K < 0. \end{array} \right.$$

L'analyse que l'on vient de rappeler suppose que la fonction F admette des dérivées première et seconde.

Or cette double hypothèse est superflue; on peut ne supposer sur la fonction F que la continuité de cette fonction, et cette hypothèse est d'ailleurs la seule qui intervient dans le problème naturel qui aboutit à l'équation de Poisson. Il y a donc intérêt à modifier l'analyse classique que l'on vient de résumer; c'est l'objet de la présente Note. J'indiquerai d'abord la modification la plus intuitive, par laquelle on peut compléter l'analyse précédente, et je donnerai ensuite une solution simple et directe du problème de Poisson.

II. Si l'on regarde la théorie des fonctions circulaires comme connue, on peut démontrer que (3) donne la solution la plus générale de (1) en fonctions continues.

A cet effet, désignons par $\varphi(x)$ une solution quelconque de (1), supposée seulement continue dans le voisinage de la valeur $x = 0$.

Soit x_1 une valeur de x appartenant à ce voisinage de $x = 0$, et pour laquelle la fonction $\varphi(x)$ ait une valeur différente de 1; si cette valeur est supérieure à 1 elle sera acquise par $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$ pour une valeur x' de x , si cette même valeur positive est inférieure à 1 elle sera acquise pour une valeur x'' de x par la fonction $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$; en désignant par F l'une ou l'autre de ces fonctions, on aura donc

$$\varphi(x_1) = F(x_1),$$

x_1 désignant, suivant les deux cas précités, soit x' soit x'' . On peut d'ailleurs évidemment supposer que, si

$$|x| < |x'|,$$

$$|x| < |x''|,$$

l'on aura

$$\varphi(x) > 0 \quad \text{et} \quad F(x) > 0.$$

Cela étant, l'équation fonctionnelle (1) permet alors de trouver d'une manière univoque toutes les valeurs des fonctions

$$\varphi\left(\frac{Kx_1}{2^n}\right) \quad \text{et} \quad F\left(\frac{Ku}{2^n}\right),$$

u désignant, suivant l'hypothèse faite plus haut, soit x' soit x'' , et l'entier K ne surpassant pas 2^n ; mais alors les fonctions

$$\varphi(tx_1) \quad \text{et} \quad F(tu)$$

sont deux fonctions continues de t , égales pour toutes les valeurs de t qui sont de la forme $\frac{K}{2^n}$, et moindres que 1; donc ces fonctions seront égales pour toutes les mêmes valeurs de t moindres que 1; donc enfin

$$\varphi(\theta) = F\left(\theta \frac{u}{x_1}\right);$$

donc la solution la plus générale de (1) est, suivant les cas, ou bien

$$\varphi(x) = \cos \frac{x}{m},$$

ou bien

$$\varphi(x) = \cos \text{hyp.} \frac{x}{m},$$

à moins que $\varphi(x)$ ne prenne dans le voisinage de $x = 0$ que la valeur constante 1.

Les solutions (3) sont donc les plus générales.

Cette analyse complète la précédente, mais elle repose toujours sur la théorie des fonctions circulaires, supposée faite avant l'étude de l'équation de Poisson. Je vais maintenant exposer une méthode qui rattache à l'équation (1) la théorie même des fonctions circulaires.

III. J'envisage donc une fonction F satisfaisant aux conditions (1) et (2), et je suppose seulement que cette fonction F soit continue.

Cette fonction *étant continue est intégrable*; je pose alors

$$\chi(x) = \int_0^x F(t) dt,$$

la fonction $\chi(x)$ admet alors $F(x)$ pour dérivée.

Je suppose, pour fixer les idées, que l'on ait $x > y$ et je considère l'intégrale

$$\int_0^{x+y} F(t) dt$$

on aura identiquement

$$\begin{aligned} \int_0^{x+y} F(t) dt &= \int_0^{x-y} F(t) dt + \int_{x-y}^x F(t) dt + \int_x^{x+y} F(t) dt \\ &= \chi(x-y) + \int_0^y F(x-t) dt + \int_0^y F(x+t) dt \\ &= \chi(x-y) + \int_0^y [F(x-t) + F(x+t)] dt. \end{aligned}$$

ou, en vertu de (1),

$$(4) \quad \chi(x+y) = \chi(x-y) + 2F(x)\chi(y);$$

on a encore identiquement

$$\begin{aligned} \int_0^{x+y} F(t) dt &= \int_0^{y-x} F(t) dt + \int_{y-x}^y F(t) dt + \int_y^{y+x} F(t) dt \\ &= \chi(y-x) + \int_0^x F(y-t) dt + \int_0^x F(y+t) dt \\ &= \chi(y-x) + \int_0^x [F(y-t) + F(y+t)] dt, \end{aligned}$$

ou, toujours en vertu de (1),

$$(5) \quad \chi(x+y) = \chi(y-x) + 2F(y)\chi(x).$$

On a déjà observé que la fonction F est paire, la fonction χ est donc impaire, en sorte qu'en ajoutant les équations (4) et (5) membre à membre on aura

$$(6) \quad \chi(x+y) = F(x)\chi(y) + F(y)\chi(x).$$

La fonction χ admettant une dérivée, l'identité (6) montre que la fonction F admettra aussi une dérivée.

Prenons, par rapport à x , puis par rapport à y , les dérivées des deux membres de l'identité (6); nous aurons

$$\begin{aligned} F(x+y) &= F'(x)\chi(y) + F(y)F(x), \\ F(x+y) &= F'(y)\chi(x) + F(x)F(y); \end{aligned}$$

d'où, en retranchant ces équations membre à membre,

$$F'(x)\chi(y) = F'(y)\chi(x);$$

d'où, en désignant par K une constante, on conclut

$$F'(x) = K\chi(x);$$

d'où, en remontant à l'une des expressions de $F(x+y)$,

$$(7) \quad F(x+y) = F(x)F(y) - K\chi(x)\chi(y).$$

D'ailleurs la formule $F'(x) = K\chi(x)$ montre que $F'(x)$ admet encore une dérivée et que l'on aura

$$F''(x) = KF(x);$$

cette dernière équation montre le changement de variable

$$x \parallel \frac{x}{\sqrt{1 \bmod K}}$$

et permettra de supposer que la constante K est égale à ± 1 ; alors, en faisant $\varepsilon = \mp 1$, on voit que les fonctions χ et F satis-



feront aux identités

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \chi(x+y) = \chi(x)F(y) + \chi(y)F(x), \\ F(x+y) = F(x)F(y) + \varepsilon\chi(x)\chi(y) \\ \frac{dF}{dx} = \varepsilon\chi(x), \\ \frac{d\chi}{dx} = F(x); \end{array} \right.$$

des deux dernières on déduit, en vertu de (2),

$$(9) \quad F^2(x) - \varepsilon\chi^2(x) = 1;$$

on déduit aussi

$$\frac{d^{2k}F}{dx^{2k}} = \varepsilon^k F, \quad \text{d'où} \quad \left(\frac{d^{2k}F}{dx^{2k}}\right)_0 = \varepsilon^k; \quad \left(\frac{d^{2k+1}F}{dx^{2k+1}}\right)_0 = 0;$$

on déduit alors de là que la fonction F est développable en série et que l'on a

$$F = 1 - \frac{x^2\varepsilon}{1.2} + \frac{x^4\varepsilon^2}{1.2.3.4} + \dots;$$

on aurait aussi

$$\left(\frac{d^{2k}\chi}{dx^{2k}}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{d^{2k+1}\chi}{dx^{2k+1}}\right)_0 = \varepsilon^k;$$

le problème statique évoque donc de lui-même les séries d'Euler. On est ainsi conduit, par la voie la plus naturelle et la plus simple, à envisager la fonction exponentielle comme la représentation analytique du *groupe d'équivalence* et à fonder, comme je l'ai montré ailleurs, en une seule étude : les fonctions circulaires, la Trigonométrie sphérique, les Trigonométries planes euclidiennes ou non euclidiennes et la Statique.

SÉANCE DU 3 JANVIER 1900.

PRÉSIDENCE DE M. VICAIRE.

La Société, réunie en assemblée générale, procède au renouvellement du Bureau et à l'élection du Conseil.

Élections :

Sont élus, à l'unanimité, membres de la Société : M. Blumen-

thal, présenté par MM. Painlevé et Borel; M. Breitling, présenté par MM. Blutel et Bourlet; M. Baire, présenté par MM. Drach et Borel.

Communications :

M. Bricard : *Sur les propriétés métriques des correspondances birationnelles.*

M. DE MONTCHEUIL adresse une Note de quelques lignes, dans laquelle il fait observer que l'on peut exprimer les coordonnées d'un point d'une surface minima par les formules suivantes, qui renferment moins de termes que celles de Weierstrass :

$$\begin{aligned}x &= f'(u) \sin u + f''(u) \cos u + f'_1(u_1) \sin u_1 + f''_1(u_1) \cos u_1, \\y &= -f'(u) \cos u + f''(u) \sin u - f'_1(u_1) \sin u_1 + f''_1(u_1) \cos u_1, \\z &= i[f(u) + f''(u) + f'_1(u_1) + f''_1(u_1)].\end{aligned}$$

SÉANCE DU 17 JANVIER 1900.

PRÉSIDENCE DE M. POINCARÉ.

Communications :

M. Fontené : *Sur l'interprétation géométrique de la condition $\Theta = 0$ pour un système de deux coniques ou de deux quadriques.*

M. Bricard : *Sur les lignes triplement orthogonales.*

M. Hadamard : *Sur les équations aux dérivées partielles.*

M. HADAMARD fait la Communication suivante :

Sur les intégrales d'un système d'équations différentielles ordinaires, considérées comme fonctions des données initiales.

On sait qu'en 1896-1897 M. Bendixson ⁽¹⁾, d'une part, M. Picard ⁽²⁾, de l'autre, ont démontré, en restant dans le domaine réel et sans supposer les fonctions données analytiques, la continuité

⁽¹⁾ Ce Bulletin, 1896.

⁽²⁾ DARBOUX, *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. IV.

et la dérivabilité des intégrales d'un système d'équations différentielles ordinaires par rapport aux constantes d'intégration.

Je vais indiquer ici la démonstration que j'ai donnée dans un cours professé, en 1897-1898, au Collège de France et qui n'a, d'ailleurs, d'autre avantage que celui de la simplicité. Elle ne nécessite, en effet, aucun algorithme nouveau, aucun calcul autre que ceux qui servent à prouver l'existence même des intégrales.

Cette existence est démontrée, comme on sait, moyennant certaines conditions d'inégalité (C) dans lesquelles figurent quatre constantes a, b, k, M .

Supposons que les coefficients des équations différentielles données, ou les données initiales, dépendent continûment d'un paramètre x . Si, dans certaines limites de variation de x , on peut prendre a, b, k, M indépendants de x , on pourra dire que les conditions (C) sont vérifiées *uniformément*.

S'il en est ainsi, *les intégrales seront des fonctions continues de x* . Cela résulte, par un raisonnement bien connu, de ce qu'elles se présentent comme limites de quantités qui dépendent elles-mêmes continûment de x .

Ceci suffit manifestement pour établir la *continuité des intégrales par rapport aux données initiales*.

Pour établir la dérivabilité de ces mêmes intégrales, considérons, par exemple, un système de deux équations à deux inconnues

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y, z), \\ \frac{dz}{dx} = \varphi(x, y, z). \end{cases}$$

Supposons que, pour $x = x_0$, les inconnues y et z prennent des valeurs données y_0, z_0 , fonctions d'un paramètre x , ces fonctions admettant des dérivées.

Pour établir qu'il en est de même de y et de z pour une valeur quelconque de x , nous donnerons à x un accroissement h , moyennant quoi y et z prendront de nouvelles valeurs, que nous désignerons par $y + \eta h, z + \zeta h$. Il s'agit de prouver que η et ζ tendent respectivement vers des limites déterminées.

Or, si nous posons

$$F(x, y, z, \tau, \zeta, h) = \begin{cases} \frac{1}{h} [f(x, y + \tau h, z + \zeta h) - f(x, y, z)], & \text{pour } h \neq 0, \\ \tau \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z}, & \text{pour } h = 0, \end{cases}$$

$$\Phi(x, y, z, \tau, \zeta, h) = \begin{cases} \frac{1}{h} [\varphi(x, y + \tau h, z + \zeta h) - \varphi(x, y, z)], & \text{pour } h \neq 0, \\ \tau \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \zeta \frac{\partial \varphi}{\partial z}, & \text{pour } h = 0, \end{cases}$$

τ et ζ seront déterminés par les équations différentielles

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{d\tau}{dx} = F(x, y, z, \tau, \zeta, h), \\ \frac{d\zeta}{dx} = \Phi(x, y, z, \tau, \zeta, h). \end{cases}$$

Considérons le système des équations (1) et (2) aux quatre inconnues y , z , τ , ζ . On voit aisément que ce système satisfait *uniformément* aux conditions (C), pourvu que les dérivées premières de f et de φ par rapport à y et à z satisfassent à des conditions analogues à celles qui sont imposées aux fonctions f et φ elles-mêmes, pour l'application du théorème d'existence au système (1). L'uniformité a d'ailleurs lieu dans un intervalle comprenant la valeur $h = 0$.

Le théorème est donc démontré : les quantités τ et ζ admettent, pour $h = 0$, des limites qui sont les dérivées de y et de z par rapport à x , et ces dérivées vérifient le système linéaire

$$\begin{cases} \frac{d\tau}{dx} = \tau \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z}, \\ \frac{d\zeta}{dx} = \tau \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \zeta \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \end{cases}$$

M. P. APPELL adresse la Note suivante :

Note sur les expériences du Commandant Hartmann.

Les remarquables expériences du Commandant Hartmann sur la déformation des métaux (1) montrent que la théorie actuelle

(1) HARTMANN, *Distribution des déformations dans les métaux soumis à des efforts* (Revue d'Artillerie, t. XLV et XLVI; 1894-1895).

de l'élasticité est insuffisante dès que les pressions ou tractions deviennent considérables. Elles mettent en évidence ce fait que, à partir d'une certaine intensité de la pression ou de la traction, l'écoulement des molécules se fait suivant des surfaces dont le plan tangent fait, avec la direction de l'effort le plus grand, un angle constant, caractéristique du métal employé.

Peut-être pourrait-on faire la théorie de ces faits en partant de l'idée suivante, que je sou mets à la discussion, n'ayant pas actuellement le temps d'en poursuivre les conséquences.

D'après la loi de la distribution des efforts autour d'un point, donnée par Cauchy, il existe en chaque point M d'un milieu trois plans rectangulaires sur lesquels ces efforts sont normaux. Prenons ces trois plans pour plans coordonnés et soient n_1, n_2, n_3 les efforts correspondants ; considérons la quadrique directrice

$$(1) \quad \frac{x^2}{n_1} + \frac{y^2}{n_2} + \frac{z^2}{n_3} = \pm 1.$$

Les directions des axes sont les directions principales en M.

Sur un élément plan $d\sigma$, mené par M, l'effort est dirigé suivant le diamètre conjugué de ce plan $d\sigma$ par rapport à la quadrique (1).

Ceci posé, on peut imaginer que, par des efforts suffisamment grands, les molécules du milieu sont soumises à une sorte de frottement intérieur qui fait qu'elles ne glissent pas les unes sur les autres tant que la direction de l'effort sur l'élément $d\sigma$ fait avec la normale à cet élément un angle moindre qu'un certain angle φ : mais que le glissement se produit dans le plan de l'élément $d\sigma$ dès que la direction de l'effort, appliqué sur $d\sigma$, fait avec la normale à $d\sigma$ un angle supérieur à φ .

Imaginons alors, pour fixer les idées, un cylindre soumis à une compression uniforme sur ses deux bases. En un point quelconque M du cylindre l'une des directions principales est sensiblement parallèle aux génératrices du cylindre. En outre, si la compression est grande, c'est l'effort parallèle à cette direction qui est le plus grand effort principal : en prenant un axe Mx parallèle aux génératrices on a donc pour l'équation de la quadrique directrice l'équation (1) où n_1 est plus grand que n_2 et n_3 .

Dans ces conditions, au moment où la compression commence, la

quadrique (1) est sensiblement une sphère; les efforts sur les divers éléments $d\sigma$ sont sensiblement normaux. Quand la compression augmente, n_1 croît plus vite que n_2 et n_3 ; la quadrique devient un ellipsoïde dont le grand axe est parallèle à l'axe des x . Or, on sait que le plan diamétral qui fait le plus petit angle possible avec son diamètre conjugué passe par l'axe moyen, n_2 par exemple, et fait avec le grand axe Mx ou n_1 un angle θ tel que

$$\operatorname{tang} \theta = \sqrt{\frac{n_3}{n_1}};$$

d'ailleurs l'angle de ce plan avec son diamètre est

$$\lambda = 2\theta.$$

Quand le rapport $\frac{n_3}{n_1}$ est voisin de 1, λ est voisin de $\frac{\pi}{2}$ et aucun glissement ne se produit. Mais quand on augmente la compression, θ diminue, λ diminue et il arrive un moment où λ atteint la limite $\frac{\pi}{2} - \varphi$. Alors un glissement se produit sur l'élément $d\sigma$ faisant avec la direction de l'effort n_1 un angle déterminé

$$\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\varphi.$$

On a donc un écoulement des molécules dans un plan faisant avec la direction de l'effort un angle déterminé. Une fois qu'un glissement se produit sur un élément, l'équilibre est rompu sur les éléments contigus et un glissement se produit sur toute une surface. Les molécules qui se sont ainsi écoulées forment une nappe d'une certaine épaisseur ε dont la cohésion est plus grande que celle de la masse du cylindre. Si l'on continue la compression, une autre nappe analogue se produit dont le feuillet moyen est à une distance au moins égale à ε du feuillet moyen de la précédente.

Je ne me dissimule pas les objections que soulève ce raisonnement ni les difficultés qui se présentent quand la quadrique (1) est un hyperboloïde, mais il m'a paru intéressant d'attirer l'attention sur cette question et d'indiquer un ordre d'idées pouvant peut-être donner la solution du problème.

— • — — —

e societaries

residents log 1

tre partie de la

pour être men

2000

Livre de société

payée au com

10/15/01: 10:00

11:00 AM - 11:30 AM

— 10 —

1. 2

11. 11. 11.

TABLE DES MATIÈRES

(FASCICULE 1).

État de la Société Mathématique au commencement de 1901.....	V
Liste des Présidents de la Société depuis sa fondation.....	319
Liste des Sociétés scientifiques et des Recueils périodiques avec lesquels la Société échange son Bulletin.....	XV

Mémoires et Communications.

H9e. — Sur une transformation de l'équation $z^2 = \lambda^2(x, y) pq$; par M. Goursat.....	1
J4d. — Sur les groupes échangeables et les groupes décomposables; par M. Edmond Maillet.....	7
M8e. — Sur une classe de surfaces algébriques dont les coordonnées s'expriment par des fonctions uniformes de deux paramètres; par M. Emile Picard.....	17
I9c. — Sur quelques problèmes relatifs à la distribution des nombres premiers; par M. E. Landau.....	23
M5kβ. — Sur les propriétés métriques d'une certaine correspon- dance (1, 1) entre cubiques focales; par M. Bricard.....	39
F8h. — Sur une application des fonctions elliptiques; par M. le comte de Sparre.....	52

Comptes rendus des Séances.

B40a. — Sur les propriétés générales des formes quadratiques; par M. Ripert.....	51
H41c. — Sur l'équation fonctionnelle de Pólya; par M. Andrade.....	56
H4a. — Sur les intégrales d'un système d'équations différentielles ordinaires, considérées comme fonctions des données initiales; par M. Hadamard.....	62
T2. — Note sur les expériences du Commandant Hartmann; par M. P. Appell.....	66

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS.

APPELL (Paul), Membre de l'Institut, Professeur à la Faculté des Sciences,
et GOURSAT (Édouard), Maître de Conférences à l'École Normale supé-
rieure. — *Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales. Étude des fonctions analytiques sur une surface de Riemann.* Avec
une Préface de M. HENRI. Un beau volume grand in-8, avec 91 figures;
1895..... 16 fr.

28162 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

Le Gérant : GAUTHIER-VILLARS.

Publication trimestrielle.

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE

PARIS.

PAR LES SECRÉTAIRES.

Adressez pour la rédaction, à M. BOUQUET, rue Fourcroy, 71,
pour la distribution, à M. BROSSÉ, rue Claude-Bernard, 65.

TOME XXVIII. — FASCICULE II.

PARIS,
AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ,
7, RUE DES GRANDS-AUGUSTINS, 7.

MM. les Membres de la Société sont priés d'adresser leur cotisation à M. *Claude-Lafontaine*,
Laquais, rue de Trévise, n° 33, à Paris, Trésorier de la Société.

On s'abonne et on trouve les Volumes déjà publiés au siège de la Société et à la Librairie
Gauthier-Villars, 35, quai des Grands-Augustins, Paris.

Les séances de la Société mathématique ont lieu les premier et troisième mercredis de chaque mois à 8 heures et demie.

Depuis le 1^{er} Mars 1900 les séances de la Société ont lieu dans une salle de la Faculté des Sciences (entrée place de la Sorbonne, escalier tout au bout de la galerie, deuxième étage à droite). La Bibliothèque devant être réinstallée, s'adresse provisoirement, pour ce qui la concerne, au concierge de la Faculté des Sciences.

La correspondance doit être adressée, soit 7, rue des Grands-Augustins, soit au domicile particulier de l'un des Secrétaires.

AVIS.

Dans sa séance du 2 février 1883, le Conseil de la Société mathématique de France a décidé qu'à l'avenir tout Membre de la Société qui voudra compléter sa collection du *Bulletin* aura le droit personnel de le faire, une seule fois pour chacun des volumes publiés avant son admission, aux prix suivants :

	Le volume.
	fr
Dix volumes au moins.....	4,60
De cinq à neuf volumes.....	5,00
Moins de cinq volumes.....	6,00

Dans sa séance du 28 février 1900, le Conseil de la Société mathématique de France a décidé qu'à l'avenir tout *Membre de la Société*, auteur d'un travail *quelconque* inséré dans le *Bulletin* et désirant en obtenir des tirages à part, **devra en faire la demande en retournant l'épreuve corrigée.**

Si le nombre demandé ne dépasse pas *cinquante*, les frais du tirage à part seront faits par la Société.

Conformément à des décisions prises par le Conseil et par la Commission d'impression :

1^o Le *Bulletin*, depuis le Tome XXVII, paraît **tous les trois mois.**

2^o Les auteurs de tous travaux destinés au *Bulletin* sont **instamment priés** d'insérer en tête de leurs manuscrits la classification que leur assigne, d'après le sujet traité, l'*Index du Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques.*

3^o Ils sont également invités à ne pas dépasser, autant que possible, la proportion de **une figure pour quatre pages** de texte imprimé.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

SUR L'INTÉGRALE RÉSIDUELLE;

Par M. HADAMARD.

1. La notion de ce que nous appellerons ⁽¹⁾ l'*intégrale résiduelle* des équations aux dérivées partielles linéaires se rattache au principe d'Huygens.

Ce principe a été entendu de façons diverses par les auteurs qui l'ont étudié. $u(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ étant une intégrale de l'équation $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u$ donnée par ses valeurs et celles de ses dérivées premières sur une certaine multiplicité M_n à n dimensions [par exemple la multiplicité $t=0$, ou la multiplicité $f(x_1, x_2, \dots, x_n)=0$]: certains géomètres, tels que M. Volterra ⁽²⁾, font consister le principe d'Huygens dans l'expression de $u(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, t^0)$ (par une intégrale définie) en fonction des valeurs que prennent $u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}$ sur une certaine fonction P_n de M_n : à savoir, la région formée par les points de M_n qui satisfont à l'inégalité

$$a^2(t - t^0)^2 \geq (x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + \dots + (x_n - x_n^0)^2.$$

Pour Kirchhoff, au contraire, de même que pour M. Poincaré, le principe d'Huygens dit encore autre chose: à savoir que, pour calculer $u(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, t^0)$, il n'est pas nécessaire de connaître les valeurs de $u, \frac{\partial u}{\partial x_i}$ sur toute l'étendue de P_n , mais qu'il suffit de s'être donné ces valeurs sur la *frontière* de P_n , c'est-à-dire sur la multiplicité à $n-1$ dimensions, lieu des points de M_n qui vérifient l'équation

$$a^2(t - t^0)^2 = (x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + \dots + (x_n - x_n^0)^2.$$

⁽¹⁾ Cf. POINCARÉ, *Propagation de la chaleur*, p. 155, 156; 1895.

⁽²⁾ *Rendic. Acc. Lincei*, 5^e série, tome I, p. 161 et suiv., *ibid.*, 265 et suiv., 1892; *Acta mathematica*, tome XVIII, p. 161 et suiv.; 1894. — M. DUNEM (*Hydrodynamique, élasticité, acoustique*, t. II) s'était déjà placé à un point de vue un peu analogue. Voir aussi COULON, *Procès-verbaux de la Société des Sciences physiques et naturelles*, Bordeaux, 1898-1899, p. 85.

C'est ce dernier point de vue que nous adopterons. D'après cela, au lieu que les formules de M. Volterra ⁽¹⁾ sont considérées par leur auteur comme démontrant le principe d'Huygens dans tous les cas, ces mêmes formules démontreront, pour nous, que ce principe est *vrai* pour n impair et *faux* pour n pair.

Au sens de M. Volterra, le principe d'Huygens semble être une propriété générale des équations linéaires aux dérivées partielles. Au sens où nous l'entendons, c'est, au contraire, un caractère très particulier de l'équation du son. L'équation des ondes cylindriques, l'équation des télégraphistes ne présentent pas ce caractère, comme on le sait : si un plan, dont les mouvements sont régis par l'équation ⁽²⁾

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

est en repos pour $t = 0$, à l'exception des points d'une aire déterminée S , non seulement un point extérieur à S entrera en mouvement à partir du mouvement où il sera atteint par l'onde provenant du mouvement de S , mais encore *après* le passage de cette onde, il ne reviendra plus au repos. L'équation du nouveau mouvement que prennent ainsi les points successivement dépassés par l'onde est l'*intégrale résiduelle* de l'équation des ondes cylindriques. C'est cette intégrale résiduelle qui s'annule identiquement dans le cas des ondes sonores sphériques, d'après le principe d'Huygens.

Il serait intéressant de déterminer toutes les équations auxquelles le principe d'Huygens s'applique. J'ai jugé utile de commencer par l'étude de l'intégrale résiduelle dans le cas le plus simple possible, celui de deux variables indépendantes.

I.

2. Prenons l'équation linéaire à deux variables indépendantes et à caractéristiques réelles sous la forme

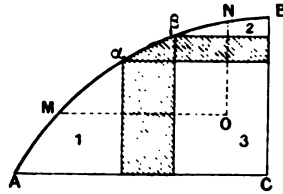
$$(1) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0.$$

⁽¹⁾ *Rendic. Acc. Lincei* [*loc. cit.*, p. 166-168, formules (A), (B), (D), (E), (A_n), (B_n), (D_n)].

⁽²⁾ Il est bien entendu que, ici, nous supposons cette équation vérifiée *dans tout le plan et constamment*. Voir plus loin n° 8.

Les valeurs de z et de ses dérivées premières étant données sur un arc AB (*fig. 1*) qui n'est coupé en plus d'un point par aucune parallèle à l'axe des x ni par aucune parallèle à l'axe des y , la fonction z est déterminée, comme on sait, dans le triangle mixti-

Fig. 1.



ligne ABC formé par l'arc AB et les parallèles menées par le point A à l'axe des x , par le point B à l'axe des y .

Nous allons supposer qu'il existe sur AB deux points α , β (le second étant plus près de B que le premier) tels que les valeurs données de z et de ses dérivées soient nulles sur tout l'arc $A\alpha$ et sur tout l'arc βB .

Sur l'arc $\alpha\beta$, au contraire, ces valeurs seront quelconques, sous la seule condition d'être nulles en α et β , afin que la continuité soit respectée aux dérivées du second ordre près.

Dès lors, si, par les points α , β , nous menons des parallèles aux axes, ces droites diviseront le triangle mixtiligne ABC en trois sortes de régions :

1° La région comprise entre les parallèles menées par α , β à l'axe des x , et celle qui est comprise entre les parallèles menées par les mêmes points à l'axe des y (régions ombrées sur la figure).

2° Les régions extérieures aux premières, à savoir, celles qui comprennent respectivement les points A et B, et qui sont numérotées 1 et 2 sur la *fig. 1*. Dans ces régions, la fonction z est manifestement nulle.

3° La région comprise entre la parallèle à l'axe des x menée par α et la parallèle à l'axe des y menée par β , et telle qu'il soit impossible de passer de cette région à l'arc AB sans traverser les régions ombrées : région numérotée 3 sur la *fig. 1*, et que l'on peut considérer, comme caractérisée par ce fait que, si de l'un quelconque O de ses points, on mène des parallèles OM, ON aux axes de

coordonnées, jusqu'à rencontre en M, N avec AB, les deux points M et N comprennent entre eux l'arc $\alpha\beta$.

C'est la fonction z considérée dans cette dernière région qui constitue l'intégrale résiduelle.

3. Le type le plus simple de mouvement dans lequel le repos se rétablit après le passage de l'onde est évidemment fourni par le problème des cordes vibrantes, lequel se ramène à l'équation

$$(2) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0.$$

Il ne faudrait pas croire, cependant, que, dans ce cas, l'intégrale résiduelle soit identiquement nulle. Pour l'équation (2), l'intégrale résiduelle est une constante, en général différente de zéro (1). Il suffit, pour le voir, de prendre l'intégrale générale sous la forme connue

$$z_0 = z_A + \int_A^N \frac{\partial z}{\partial x} dx + \int_A^M \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

(où, bien entendu, M et N désignent, comme tout à l'heure, les points d'intersection de l'arc AB avec les parallèles aux axes menées par le point quelconque O). Si les points M et N comprennent entre eux le segment $\alpha\beta$ et que z , $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ soient nuls sur $A\alpha$, βB , la formule précédente se réduit à

$$z_0 = \int_\alpha^\beta \frac{\partial z}{\partial x} dx,$$

c'est-à-dire à $z_0 = \text{const.}$, comme nous l'avions annoncé. Cette constante n'est d'ailleurs évidemment pas nulle en général. Nous verrons d'ailleurs que l'intégrale résiduelle ne peut être identiquement nulle pour aucune équation de la forme (1).

4. Nous sommes dès lors amenés à chercher pour quelles équations l'intégrale résiduelle est de la forme

$$(3) \quad C_1 V_1 + C_2 V_2 + \dots + C_p V_p,$$

$V_1, V_2, \dots, V_p$ étant seuls fonctions de x et de y , tandis que $C_1,$

(1) Sur cette contradiction apparente, voir plus loin, n° 13.

$C_2, \dots, C_p$ dépendent uniquement de la distribution des valeurs données sur l'arc $\alpha\beta$.

Plus généralement encore, proposons-nous de trouver dans quels cas l'intégrale résiduelle satisfait à une ou plusieurs équations linéaires distinctes de l'équation proposée (1) et de ses dérivées. Cette question comprend évidemment la précédente comme cas particulier : car, étant donnée une expression du type (3), on peut toujours trouver un système d'équations linéaires aux dérivées partielles dont elle soit l'intégrale générale.

La réponse à une telle question est aisément fournie par la formule fondamentale (1)

$$(4) \quad \begin{cases} z_0 = z = \frac{z_M + z_N}{2} + \int_M^N \left[a_1 u z_1 + \frac{1}{2} \left(u \frac{\partial z_1}{\partial y_1} - z_1 \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] dy_1 \\ \quad - \left[b_1 u z_1 + \frac{1}{2} \left(u \frac{\partial z_1}{\partial x_1} - z_1 \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] dx_1, \end{cases}$$

où $u(x, y, x_1, y_1)$ est la fonction de Riemann définie par les propriétés suivantes :

I. Considérée comme fonction des coordonnées x, y du point O, elle vérifie l'équation proposée;

II. Considérée comme fonction des coordonnées x_1, y_1 d'un point P (lequel, dans la formule précédente, décrit l'arc MN), elle vérifie l'équation adjointe;

III. Lorsque x est égal à x_1 , on a

$$(5) \quad u(x_1, y, x_1, y_1) = e^{-\int_{y_1}^y a(x_1, y) dy}$$

et, lorsque y est égal à y_1 ,

$$(6) \quad u(x, y_1, x_1, y_1) = e^{-\int_x^{x_1} b(x, y_1) dx}.$$

(1) DARBOUX, *Leçons sur la théorie des surfaces*, Tome II, Liv. IV, Chap. IV, n° 358. Nous appelons ici x, y, x_1, y_1 , respectivement, les quantités qui sont désignées, à l'endroit cité, par x_0, y_0, x, y . Quant à z_1, a_1, b_1 , ils représentent les valeurs que prennent z, a, b , lorsqu'on remplace x, y par x_1, y_1 .

Dans le cas de l'intégrale résiduelle, la formule (4) se réduit à

$$(4') \quad \left\{ \begin{aligned} z_0 &= \int_{\alpha}^{\beta} \left[a_1 u z_1 + \frac{1}{2} \left(u \frac{\partial z_1}{\partial y_1} - z_1 \frac{\partial u}{\partial y_1} \right) \right] dy_1 \\ &\quad - \left[b_1 u z_1 + \frac{1}{2} \left(u \frac{\partial z_1}{\partial x_1} - z_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) \right] dx_1. \end{aligned} \right.$$

Nous avons à rechercher si la fonction ainsi obtenue de x, y vérifie une équation linéaire

$$(7) \quad \tilde{\mathcal{F}}(z) = \sum \Lambda_{pq}(x, y) \frac{\partial^{p+q} z}{\partial x^p \partial y^q} = 0.$$

Si l'on observe que l'expression de $\tilde{\mathcal{F}}(z)$ se déduit de la formule (4') par des différentiations sous le signe $\int$, il est clair que l'on aura

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} \tilde{\mathcal{F}}(z) &= \int_{\alpha}^{\beta} \left[a \Phi z_1 + \frac{1}{2} \left(\Phi \frac{\partial z_1}{\partial y_1} - z_1 \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} \right) \right] dy_1 \\ &\quad - \left[b \Phi z_1 + \frac{1}{2} \left(\Phi \frac{\partial z_1}{\partial x_1} - z_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right) \right] dx_1, \end{aligned} \right.$$

en posant

$$\Phi(x, y, x_1, y_1) = \tilde{\mathcal{F}}(u).$$

Or, sur l'arc $\alpha\beta$, — sous la simple condition de s'annuler aux extrémités, — z_1 et l'une des deux dérivées $\frac{\partial z_1}{\partial x_1}, \frac{\partial z_1}{\partial y_1}$ sont arbitraires. Donc l'équation (8) ne peut avoir lieu identiquement (1) que si l'on a, sur $\alpha\beta$,

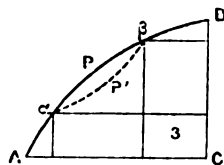
$$(9) \quad \Phi = 0$$

§. La condition précédente ne semble démontrée que pour les positions du point (x_1, y_1) situées sur l'arc $\alpha\beta$ [le point x, y étant quelconque dans la région (3)]. Mais il est aisé de voir qu'elle doit encore être remplie quelle que soit la position du point (x_1, y_1) dans le rectangle qui a ses côtés parallèles aux axes et dont deux sommets opposés sont en α, β .

(1) D'après des considérations classiques de calcul des variations, la conclusion subsisterait si l'on imposait à z_1 et à ses dérivées en α et en β , des conditions de continuité plus restrictives, telles que la continuité des dérivées jusqu'à un ordre quelconque p .

Remplaçons, en effet, l'arc considéré $A\alpha P\beta B$ par un autre arc $A\alpha P'\beta B$ (satisfaisant à la même condition de n'être rencontré qu'une fois par les parallèles aux axes) qui passe également aux points α, β (arc représenté en traits interrompus sur la *fig. 2*). Une fonction Z , solution de l'équation (1), différente de zéro sur

Fig. 2.



l'arc $\alpha P\beta$ et nulle sur le reste de l'arc $A\alpha P\beta B$, est aussi, d'après les théorèmes généraux, différente de zéro sur l'arc $\alpha P'\beta$ et nulle sur le reste de l'arc $A\alpha P'\beta B$, et inversement. Donc la condition (9) doit être vérifiée aussi bien sur l'arc $\alpha P'\beta$ que sur l'arc $\alpha P\beta$.

Il est d'ailleurs aisé de retrouver le même résultat directement : car pour entraîner la relation (8), il faut que l'on ait, pour toutes les positions du point P sur l'arc $\alpha\beta$, non seulement $\Phi = 0$, mais encore

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = 0.$$

Or Φ , considéré comme fonction de x_1, y_1 , vérifie manifestement, aussi bien que u , l'adjointe de l'équation (1). Donc il est nul dans tout le rectangle que nous avons défini tout à l'heure.

Nous admettrons que la relation $\Phi = 0$ a lieu pour toutes les positions du point (x, y) comme du point (x_1, y_1) dans l'aire ABC. C'est ce qui arrive évidemment si les coefficients de l'équation donnée sont analytiques (1).

6. Nous avons donc à rechercher dans quelles conditions la fonction u peut être, quel que soient x, y , une intégrale de l'équation (7).

Or, il résulte des raisonnements présentés dans les *Leçons sur la théorie des surfaces* de M. Darboux (2), que, parmi les inté-

(1) Il est manifestement évident que l'intégrale Φ est nulle pour une infinité de points dans le rectangle, sans qu'il soit nécessaire qu'elle le soit partout. (Cf. *Leçons*, tome II, § 13.)
(2) Tome II, § 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100.

grales communes aux équations (1) et (7), il n'y en a qu'un nombre fini de linéairement indépendantes, à moins que la suite de Laplace relative à l'équation (1) ne soit limitée au moins dans un sens.

Les équations pour lesquelles la suite de Laplace est limitée dans un sens constituent une première solution du problème. Si, en effet, on prend une telle équation sous la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \log H_{p-1}}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial \log H_p}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial \log H_p}{\partial x} \frac{\partial \log H_{p-1}}{\partial y} z = 0,$$

et son intégrale générale sous la forme

$$(10) \quad z = D_x \left(0, \alpha, \frac{\partial \alpha}{\partial y}, \dots, \frac{\partial^{p-1} \alpha}{\partial y^{p-1}} \right) = \begin{vmatrix} 0 & \alpha & \frac{\partial \alpha}{\partial y} & \dots & \frac{\partial^{p-1} \alpha}{\partial y^{p-1}} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \alpha}{\partial x} & \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial y} & \dots & \frac{\partial^p \alpha}{\partial x \partial y^{p-1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^p \theta}{\partial x^p} & \frac{\partial^p \alpha}{\partial x^p} & \frac{\partial^{p+1} \alpha}{\partial x^p \partial y} & \dots & \frac{\partial^{2p-1} \alpha}{\partial x^p \partial y^{p-1}} \end{vmatrix},$$

$$(11) \quad \theta = X + \int Y \alpha dy,$$

les notations étant celles du n° 380 (t. II, p. 127) de l'Ouvrage cité de M. Darboux, on verra que l'intégrale u de Riemann s'obtient en prenant pour Y la valeur zéro et, pour X , une combinaison linéaire (à coefficients indépendants de x) des fonctions

$$\alpha(x, y_1), \quad \frac{\partial \alpha(x, y_1)}{\partial y_1}, \quad \frac{\partial^2 \alpha(x, y_1)}{\partial y_1^2}, \quad \dots, \quad \frac{\partial^p \alpha(x, y_1)}{\partial y_1^p},$$

telle que X et ses $p-1$ premières dérivées s'annulent pour $x = x_1$, la $p^{\text{ième}}$ dérivée étant égale à $\frac{1}{H_{p-1}(x_1, y_1)}$.

Dès lors, u est de la forme $AX + BX' + \dots + LX^{(p)}$, où $A, B, \dots, L$ sont des fonctions parfaitement déterminées de x et de y : il satisfait, par conséquent, quels que soient x_1, y_1 , à une équation de la forme

$$\lambda u + \lambda_1 \frac{\partial u}{\partial y} + \dots + \lambda_{p+1} \frac{\partial^{p+1} u}{\partial y^{p+1}} = 0,$$

où $\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_{p+1}$ sont des fonctions de x, y .

7. Ce premier cas écarté, nous savons que toutes les intégrales communes aux équations (1) et (7) doivent être des combinaisons linéaires d'un nombre fini d'entre elles et que, par conséquent, la fonction u est de type (3), $C_1, C_2, \dots, C_p$ étant des fonctions de x_1, y_1 .

C'est ce qui a lieu pour les équations à suite de Laplace se terminant dans les deux sens. Si, en effet, dans les formules du numéro précédent, on prend ⁽¹⁾

$$\alpha = X_1 \eta_1 + X_2 \eta_2 + \dots + X_m \eta_m,$$

$X_1, X_2, \dots, X_m$ étant des fonctions de x , pendant que $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$ sont des fonctions de y , il est clair que θ devient une combinaison linéaire de $X_1, X_2, \dots, X_m$, les coefficients étant fonctions de x_1, y_1 . Donc u est une combinaison linéaire ⁽²⁾ des intégrales que l'on obtient en remplaçant, dans la formule (10), θ successivement par $X_1, X_2, \dots, X_m$.

Je dis que ces équations sont les seules qui répondent à la question.

⁽¹⁾ DARBOUX, *loc. cit.*, n° 382. Nous avons remplacé les lettres $x_1, x_2, \dots, x_m$ par $X_1, X_2, \dots, X_m$ et, de même, nous remplaçons ci-dessous, les lettres $y_1, y_2, \dots, y_m$ par $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$.

⁽²⁾ Si nous partons de l'expression

$$z = M \begin{vmatrix} X & X' & \dots & X^{(i)} & Y & Y' & \dots & Y^{(j)} \\ X_1 & X'_1 & \dots & X_1^{(i)} & Y_1 & Y'_1 & \dots & Y_1^{(j)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_m & X'_m & \dots & X_m^{(i)} & Y_m & Y'_m & \dots & Y_m^{(j)} \end{vmatrix}$$

de l'intégrale générale (Darboux, *loc. cit.*, n° 340, formule 65, p. 48), la fonction u s'obtient en remplaçant X par $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_m X_m$ et Y par 0, ou, ce qui revient au même, X par 0 et Y par $-(\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2 + \dots + \lambda_m Y_m)$; les λ étant déterminés par les conditions

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 X_1 &+ \dots + \lambda_m X_m &= 0 \\ \lambda_1 X'_1 &+ \dots + \lambda_m X'_m &= 0 \\ \dots &\dots &\dots \\ \lambda_1 X_1^{(i-1)} &+ \dots + \lambda_m X_m^{(i-1)} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ pour } x = x_1,$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 Y_1 &+ \dots + \lambda_m Y_m &= 0 \\ \dots &\dots &\dots \\ \lambda_1 Y_1^{(j-1)} &+ \dots + \lambda_m Y_m^{(j-1)} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ pour } y = y_1,$$

et par l'équation qui exprime que $u = 1$ pour $x = x_1, y = y_1$.

C'est ce que l'on démontrera en substituant l'expression (3) dans les équations (5) et (6). La première donne

$$C_1(x_1, y_1) V_1(x_1, y) + C_2(x_1, y_1) V_2(x_1, y) + \dots \\ + C_p(x_1, y_1) V_p(x_1, y) = e^{-\int_{y_1}^y a(x_1, y) dy}.$$

Le second membre étant évidemment le produit d'une fonction de x_1, y par une fonction de x_1, y_1 , cette équation prouve qu'il existe une relation à coefficients indépendants de y entre les fonctions $V_1, V_2, \dots, V_p$ et $e^{\int a dy}$. Il en existe même, en général (1), plus d'une, de sorte que l'on peut éliminer l'exponentielle et écrire, entre les intégrales $V_1, V_2, \dots, V_p$ la relation

$$(12) \quad X_1 V_1(x, y) + X_2 V_2 + \dots + X_p V_p = 0,$$

où les X_i sont des fonctions de x . De même, l'équation (6) nous donnera la relation

$$(13) \quad Y_1 V_1(x, y) + Y_2 V_2 + \dots + Y_p V_p = 0,$$

à coefficients constants de y .

Or, d'après un théorème de M. Goursat (2), la relation (12) entraîne la limitation de la suite de Laplace dans un sens, et l'équation (13), la limitation de la même suite dans le sens opposé.

La question que nous nous étions posée est donc complètement résolue : la réponse est fournie par les équations pour lesquelles la suite de Laplace se termine, soit dans un sens, soit dans les deux.

II.

8. Le problème de la propagation du son dans un milieu *limité* est différent de celui dont nous venons de parler, et le principe d'Huygens, sous la forme considérée dans ce qui précède, ne s'y applique pas.

Considérons, par exemple, une sphère solide plongée dans un

(1) Le seul cas d'exception est celui où les rapports mutuels des C_i seraient fonctions de x_1 seul. Il se traiterait par les mêmes considérations et ne conduirait à rien de nouveau.

(2) *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre*, tome II, pages 21-28.

gaz indéfini et dont le rayon est soumis à des oscillations très petites pendant que le centre ne varie pas. S'il y avait repos jusqu'à l'origine des temps, et que, après l'instant $t = 0$, la sphère revienne au repos pour y rester indéfiniment, on sait ⁽¹⁾ que, après le passage des ondes émises pendant les intervalles de temps compris entre 0 et θ , il s'établit un mouvement résiduel en général différent de zéro.

Il n'y a là aucune contradiction avec les remarques que nous avons rappelées en commençant : il faut tenir compte, en effet, d'une part, de ce que l'équation

$$(14) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u$$

n'est vérifiée, cette fois, que dans une partie de l'espace, à savoir celle qui est extérieure à la sphère pulsante; d'autre part, que, sur la surface limite, les conditions données ne sont pas celles que suppose la formule de Kirchhoff.

Celle-ci, en effet, est relative au cas où l'on considère une fonction u satisfaisant à l'équation (14) dans un domaine sur la frontière duquel on se donne les valeurs de u et celles de ses dérivées premières, en même temps qu'on se donne les mêmes quantités à l'origine des temps.

Or, dans le problème des petits mouvements d'un gaz limité par des parois solides mobiles, ce n'est point ainsi que les choses se passent. La fonction u (potentiel des vitesses) est bien donnée, ainsi que ses dérivées, dans tout le domaine considéré D , pour $t = 0$; mais on ne donne que sa dérivée normale, sur la frontière de D , pour $t > 0$.

En fait, si l'on se donne, pour $t = 0$, les valeurs d'une intégrale u de l'équation (14) ainsi que celles de sa dérivée par rapport à t , on ne peut plus donner arbitrairement, sur la frontière F de D , pour $t > 0$, que les valeurs de la fonction u elle-même ou celles de sa dérivée normale.

Que le problème ainsi posé ne puisse admettre plus d'une solution, autrement dit, que l'on trouve nécessairement $u = 0$ lorsque

⁽¹⁾ Voir DUREN, *Hydrodynamique, élasticité, acoustique*, tome I, Ch. XII, pages 235-237.

les données initiales et limites dont nous venons de parler sont nulles, c'est ce que l'on voit aisément en considérant l'intégrale

$$\iiint_D \left\{ \alpha^2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right\} dx dy dz,$$

dont la dérivée par rapport à t est

$$\begin{aligned} & 2 \iiint_D \left[\alpha^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial t} \right) + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial t} \right] dx dy dz \\ &= -2 \iint_F \alpha^2 \frac{\partial u}{\partial t} \frac{du}{dn} d\sigma - 2 \iiint_D \frac{\partial u}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t^2} - \alpha^2 \Delta u \right) dx dy dz, \end{aligned}$$

et qui, par conséquent, est constamment nulle si elle est nulle initialement et si l'on a, sur la frontière, l'une des deux conditions

$$u = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{du}{dn} = 0.$$

C'est également ce qui résulte de l'introduction des fonctions fondamentales ⁽¹⁾ U_i ($i = 1, 2, \dots, \infty$) telles que l'on ait

$$\Delta U_i + k_i U_i = 0 \text{ dans } D, \quad U_i = 0 \text{ sur } F,$$

car alors, moyennant la condition $u = 0$ (sur F), l'intégrale

$$I_i = \iiint_D u U_i dx dy dz$$

satisfait à l'équation

$$\frac{d^2 I_i}{dt^2} = -k_i \alpha^2 I_i$$

et, par conséquent (en vertu des conditions initiales), est constamment nulle, quel que soit i ; ce qui ne peut se faire que pour $u = 0$.

Pareil raisonnement s'appliquera d'ailleurs évidemment si la donnée à la frontière est $\frac{du}{dn} = 0$.

On voit que, dans ces deux questions, on retrouve une analogie partielle avec ce qui se passe dans le cas des équations à caractéristiques imaginaires. Une conséquence de cette analogie est que

⁽¹⁾ POINCARÉ, *Leçons sur la propagation de la chaleur*; LE ROY, *Thèse*, 3^e Partie, Chap. II.

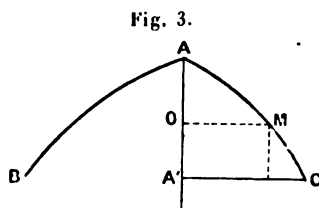
la solution de ces questions est, sans aucun doute, beaucoup plus difficile que celle des problèmes où l'on peut se donner la fonction u et ses dérivées. En effet, au lieu que cette dernière solution peut, comme le montrent la formule de Kirchhoff et la formule précédemment rappelée de Riemann, se développer indépendamment de la forme des domaines considérés, l'étude des questions dont il vient d'être parlé doit dépendre essentiellement de la forme du domaine D .

9. Les circonstances signalées au numéro précédent tiennent manifestement à ce que, dans l'espace à quatre dimensions lieu du point (x, y, z, t) , le domaine $(D, t = 0)$ et le domaine $(F, t > 0)$ peuvent être coupés par une même droite parallèle à une génératrice du cône

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 t^2.$$

Pareil fait se présente, dans les équations à deux variables indépendantes, lorsque la courbe le long de laquelle on entend se donner l'inconnue et ses dérivées est coupée en plus d'un point par des caractéristiques. On sait ⁽¹⁾ que, dans ce cas, on ne peut pas prendre arbitrairement ces différentes données tout le long de la courbe.

Par contre, il est aisé de voir que si A est le point [point anguleux (*fig. 3*) ou point à tangente caractéristique] qui divise la



courbe en deux parties AB , AC telles que chacune d'elles ne soit rencontrée qu'en un point par les caractéristiques, on peut se donner la fonction inconnue z ainsi qu'une dérivée partielle sur l'un des arcs AB , AC , et z seule sur l'autre ⁽²⁾.

⁽¹⁾ PICARD, *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. XXIII, p. 150.

⁽²⁾ On suppose, bien entendu, que les valeurs de z au point A concordent entre elles ainsi que les deux valeurs de sa dérivée suivant l'arc AC .

Car, l'équation étant supposée prise sous la forme (1) et la direction des caractéristiques qui rencontrent à la fois AB et AC étant celle de l'axe des x (fig. 3), la donnée de z et de ses dérivées sur AB fait connaître z sur la parallèle AA' menée à l'axe des y par le point A. On est donc ramené à trouver l'intégrale qui prend, sur AA' et sur AC, des valeurs données. M. Picard a démontré (1) que ce problème est possible.

La solution est d'ailleurs unique. C'est ce que l'on peut voir de la manière suivante : Soit z une intégrale qui s'annule sur AA' et sur AC. Il s'agit de démontrer que z est identiquement nul dans le triangle mixtiligne AA'C formé par les deux lignes précédentes et la parallèle à l'axe des x menée par le point C (fig. 3).

Prenons pour origine des coordonnées le point A, et soit φ_1 la série des valeurs de $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial z_1}{\partial y_1} - \frac{dx_1}{dy_1} \frac{\partial z_1}{\partial x_1} \right)$ sur l'arc AC (2) (ou, ce qui revient au même, la série des valeurs de $\frac{\partial z_1}{\partial y_1}$, puisque, sur cet arc, $dz_1 = 0$). La formule (4) donne ici

$$(15) \quad z = \int_a^N u \varphi_1 dy_1;$$

et, puisque z est nul sur AA', on a, pour toute valeur de y comprise entre 0 et la valeur de y_0 qui correspond au point A',

$$0 = \int_0^y u(0, y, x_1, y_1) \varphi_1 dy_1.$$

Multiplions par $\psi(y) dy$ et intégrons de 0 à y_0 ; il vient

$$(16) \quad \begin{cases} 0 = \int_0^{y_0} \psi(y) dy \int_0^y u(0, y, x_1, y_1) \varphi_1 dy_1 \\ = \int_0^{y_0} \varphi_1 dy_1 \int_{y_1}^{y_0} \psi(y) u(0, y, x_1, y_1) dy. \end{cases}$$

(1) Note Sur les méthodes d'approximations successives dans la théorie des équations différentielles, n° 5, in DARBOUX, *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. IV, pages 361, 362.

(2) x_1 est ici une fonction de y_1 donnée par l'équation de la courbe.

Or nous pouvons nous arranger de manière que la quantité

$$(17) \quad \int_{y_1}^{y_0} \psi(y) u(0, y, x_1, y_1) dy$$

soit une fonction donnée quelconque F de y_1 [pourvu que $F(y_0)$ soit nul]. En effet, nous savons qu'il existe *au moins* une solution v de l'équation adjointe qui s'annule sur $A'C$ et prend en chaque point $M(x_1, y_1)$ de l'arc AC la valeur $F(y_1)$. Pour cette fonction v , considérée dans le rectangle à côtés parallèles aux axes qui a pour sommets opposés A' , M , la formule (16) du Livre IV, Ch. IV (t. II, p. 80) des *Leçons* de M. Darboux devient évidemment

$$F(y_1) = - \int_{y_1}^{y_0} u(0, y, x_1, y_1) \left(\frac{\partial v}{\partial y} - av \right) dy,$$

ce qui montre que l'intégrale (17) est égale à $F(y_1)$ lorsqu'on prend

$$\psi(y) = - \left(\frac{\partial v}{\partial y} - av \right).$$

Dès lors l'équation (16) n'est possible (puisque F est arbitraire) que pour $\varphi_1 = 0$. La formule (15) donne bien alors

$$z = 0.$$

Notre conclusion est donc démontrée. Le raisonnement précédent montre même que, *une fois connue, la solution du problème pour la courbe AC , la droite $A'C$ et l'équation adjointe, on peut en déduire la solution du même problème pour la courbe AC , la droite AA' et l'équation proposée*. Car il résulte de ce nous avons dit tout à l'heure que ce problème se réduit à déterminer la fonction φ_1 par la condition que l'intégrale

$$\int_0^y u(0, y, x_1, y_1) \varphi_1 dy_1$$

soit une fonction donnée de y . Or, si nous savons résoudre le problème pour la courbe AC , la droite $A'C$ et l'équation adjointe, nous pourrons (ainsi que nous venons de le voir également) cal-

culer, à l'aide de cette condition, l'intégrale

$$\int_0^{y_1} \varphi_1 F(y_1) dy_1,$$

quelle que soit la fonction F , pourvu qu'elle soit nulle en C . Il suffira alors, pour déterminer φ_1 en un point quelconque (x'_1, y'_1) de l'arc AC , de remplacer F par $\mu F e^{-\mu(y_1 - y'_1)}$ et de passer à la limite pour $\mu = \infty$. On aura ainsi la valeur de $\sqrt{\pi} F(y'_1) \varphi_1(y'_1)$.

10. Nous avons dit que la solution du problème ainsi posé devait dépendre de la forme des domaines où on l'étudie. C'est ce que l'on vérifie aisément, pour le cas de deux variables indépendantes, en considérant les équations les plus simples, par exemple les équations pour lesquelles la suite de Laplace se termine dans les deux sens et dont l'intégrale générale est, par conséquent, de la forme

$$z = AX + A_1 X' + \dots + A_i X^{(i)} + B_1 Y + B_1 Y' + \dots + B_j Y^{(j)}$$

X et Y étant des fonctions arbitraires, l'une de x , l'autre de y , tandis que les A et les B sont des fonctions déterminées de x et de y .

Supposons z donné ainsi que ses dérivées sur l'arc AB (fig. 3). Alors X et Y seront connus ⁽¹⁾ pour les valeurs des arguments qui correspondent à des points de cet arc, et, par conséquent, Y sera également connu sur l'arc AC . Dès lors, si l'on donne les valeurs de z sur cet arc, X sera terminé par une équation linéaire de la forme

$$AX + A_1 X' + \dots + A_i X^{(i)} = f(x),$$

mais pour l'intégration de cette équation, *il faut imaginer que, dans chacun des coefficients $A(x, y)$, $A_1(x, y)$, etc., on ait remplacé y par sa valeur en fonction de x , tirée de l'équation de AC* . Il est, dès lors, bien clair que l'équation différentielle obtenue dépend essentiellement de la forme de celle-ci.

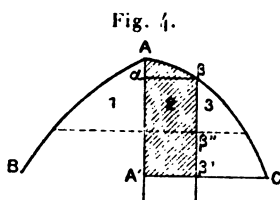
11. Relativement à ce nouveau problème, l'intégrale rési-

⁽¹⁾ Ils le sont, du moins, à des quantités près qui ne changent pas la valeur des intégrales et qui, par suite, ne peuvent modifier la suite du raisonnement.

duelle devra, pour maintenir l'analogie avec la question rappelée au n° 8, être définie de la façon suivante :

z et ses dérivées seront nuls sur l'arc AB. Les valeurs de z seront ensuite données différentes de zéro sur une partie A β de l'arc AC, puis nulles sur l'arc β C.

Les parallèles AA', $\beta\beta'$ menées par A, β à l'axe des y détermineront trois régions : la région 1 (fig. 4), comprise entre AB



et AA' et où z sera manifestement nul ; la région 2, comprise entre A β , AA' et $\beta\beta'$; enfin la région 3, comprise entre $\beta\beta'$ et β C. C'est l'intégrale considérée dans cette dernière région qui est l'intégrale résiduelle.

Soit α la projection de β sur AA'. Nous pourrions remplacer l'arc A β par le segment $\alpha\beta$: l'intégrale z sera définie comme étant nulle sur $\alpha A'$, prenant sur $\alpha\beta$ des valeurs quelconques (sous la seule restriction d'être nulle ainsi que sa dérivée en α et d'être nulle en β , de manière que sa dérivée, suivant la direction β C, soit également nulle) et étant nulle sur β C.

Sur $\beta\beta'$, d'après une formule rappelée tout à l'heure [DARBOUX, *Leçons sur la théorie des surfaces*, Liv. IV, Chap. IV, n° 359, formule (16)], les valeurs de l'intégrale seront données par l'expression

$$(18) \quad z(\xi, \gamma) = \int_0^\xi u(\xi, \gamma, x_1, \tau_1) \left(\frac{\partial z_1}{\partial x} + b_1 z_1 \right) dx_1,$$

où ξ, τ_1 sont les coordonnées du point β , les notations z_1, b_1 désignant respectivement les quantités $z(x_1, \tau_1)$ et $b(x_1, \tau_1)$.

12. Cherchons à quelles conditions l'intégrale résiduelle sera du type (3). D'après ce qui a été dit au n° 10, nous supposons que l'arc β C et la droite $\beta\beta'$ aient des positions *déterminées*.

Il est, dès lors, manifestement nécessaire et suffisant que, sur

$\beta\beta'$, les valeurs de z soient de la forme

$$C_1 V_1(\xi, y) + C_2 V_2(\xi, y) + \dots + C_p V_p(\xi, y),$$

et, par conséquent, qu'elles vérifient une certaine équation linéaire

$$(19) \quad F(z) = a_0(\xi, y) \frac{\partial^p z}{\partial y^p} + a_1(\xi, y) \frac{\partial^{p-1} z}{\partial y^{p-1}} + \dots + a_p(\xi, y) z = 0.$$

Or on a, d'après la formule (18),

$$F(z) = \int_0^\xi \Phi \left(\frac{\partial z_1}{\partial x_1} + b_1 z_1 \right) dx_1,$$

en posant, comme précédemment, $\Phi = F(u)$.

Pour que $F(z)$ soit nul, quelles que soient les valeurs de z_1 [pourvu que z_1 s'annule en α et en β dans les conditions indiquées (1)], il faut et il suffit que l'on ait

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} - b_1 \Phi = 0,$$

ce qui peut encore s'écrire

$$F \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} - b_1 u \right) = 0.$$

Cette condition est évidemment réalisée lorsque $u(x, y, x_1, y_1)$ est de la forme $A_1 X_1 + A_2 X_2 + \dots + A_p X_p$ (où $A_1, A_2, \dots, A_p$ sont des fonctions déterminées de x, y , et $X_1, X_2, \dots, X_p$ des fonctions de x, x_1, y_1); par conséquent, elle est vérifiée par les équations pour lesquelles la suite de Laplace se termine dans un

(1) La condition qui exprime que la dérivée de z_1 suivant la ligne βC est nulle est de la forme $\frac{\partial z_1}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial z_1}{\partial y_1} = 0$, où λ est le coefficient angulaire de la tangente à cette ligne, et où $\frac{\partial z_1}{\partial y_1}$ doit être remplacé, ainsi qu'on le sait, par

$$-e^{-\int_0^\xi b_1 dx_1} \int_0^\xi \left(a \frac{\partial z_1}{\partial x_1} + c z_1 \right) e^{-\int_0^{x_1} b_1 dx_1} dx_1.$$

Les principes du calcul des variations montrent que cette condition n'a pas d'influence sur la conclusion finale.

seul sens, alors que, pour ces équations, l'intégrale résiduelle relative au problème précédemment étudié ne satisfaisait qu'à une seule équation linéaire distincte de (1).

13. Mais il y a plus : dans la question actuelle, *l'intégrale résiduelle peut être identiquement nulle* : c'est ce qui arrive toutes les fois que l'invariant $\frac{\partial a}{\partial x} + ab - c$ est nul. Car alors, l'intégrale générale étant de la forme

$$z = M \left(X + \int x Y dy \right)$$

(X et Y étant les fonctions arbitraires), la fonction Y doit être nulle pour toutes les valeurs considérées de y [puisque z est identiquement nul dans la région (1)], et la fonction X, nulle pour toutes les valeurs de x supérieures à ξ (puisque z est nul sur l'arc βC).

La propagation des ondes planes infiniment petites dans un gaz primitivement au repos, sous l'action d'un piston dont le mouvement est donné, dépend de la question que nous étudions en ce moment pour l'équation $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$. Le fait qu'il n'y a pas, pour un tel gaz, de mouvement résiduel après le passage de l'onde est donc d'accord avec notre conclusion actuelle.

14. Les équations pour lesquelles $\frac{\partial a}{\partial x} + ab - c$ est nul sont d'ailleurs les seules pour lesquelles cette conclusion subsiste, quelles que soient les lignes $\beta\beta'$ et βC ; elles sont même les seules pour lesquelles elle subsiste, quel que soit le point β , la ligne AC étant donnée une fois pour toutes.

En effet, il résulte de ce qui a été dit au n° 12 que, si l'on veut que l'intégrale résiduelle relative à la courbe donnée βC et à la droite donnée $\beta\beta'$ soit toujours nulle, il faut que l'on ait, pour $y_1 = \tau_1$,

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} - b_1 u = 0.$$

Or, si nous posons

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} - b_1 u = v(x, y, x_1, y_1),$$

on voit aisément, à l'aide de la définition de u , que l'on a (β'' étant un point quelconque de $\beta\beta'$, point dont l'ordonnée est y)

$$(20) \quad v(\beta'', \beta) = e^{\int_{\beta''}^{\beta} a dy} \int_{\beta''}^{\beta} \left(\frac{\partial a}{\partial x} + ab - c \right) dy.$$

On devra donc avoir, dans les hypothèses actuelles et quel que soit le point β'' ,

$$\int_{\beta''}^{\beta} \left(\frac{\partial a}{\partial x} + ab - c \right) dy = 0,$$

ce qui exige que $\frac{\partial a}{\partial x} + ab - c$ soit nul, quel que soit y , pour $x = \xi$.

Si donc le fait doit avoir lieu, quel que soit ξ , l'invariant $\frac{\partial a}{\partial x} + ab - c$ doit être identiquement nul, comme nous l'avions annoncé.

15. Ainsi l'intégrale résiduelle des équations linéaires à deux variables indépendantes est beaucoup plus particulière dans le problème qui fait l'objet des n^{os} 9 et suivants que dans celui que nous avons traité aux n^{os} 2 à 7. Il est remarquable que ce soit précisément l'inverse qui se produit dans le problème des ondes sphériques, puisque l'intégrale résiduelle de ce problème est nulle dans le cas où l'on se donne u et ses dérivées pour $t = 0$, quels que soient x, y, z , et différente de zéro, si les données sont celles du n^o 8.

Lorsque la sphère de rayon R , à l'extérieur de laquelle on considère le mouvement, pulse uniformément en tous ses points, de sorte qu'elle reste sphérique et que son rayon seul varie, l'intégrale résiduelle est déterminée à un facteur constant près ⁽¹⁾, et vérifie, par conséquent, des équations linéaires distinctes de l'équation (14).

Il ne semble pas en être de même si les différents points de la surface sphérique ont des mouvements normaux différents. On peut, en effet, dans ce cas, former l'intégrale générale et l'intégrale résiduelle par le procédé suivant :

(¹) Voir DUHEM, *loc. cit.*

Une intégrale u de l'équation (14) peut évidemment, en dehors de la sphère qui a l'origine pour centre et R pour rayon, être développée en série de la forme

$$(21) \quad u = \sum P_p u_p,$$

où P_p est un polynôme sphérique de degré p , et u_p une fonction de r et de t . L'équation qui détermine u_p est alors

$$(22) \quad \frac{\partial^2 u_p}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{(p+1) \partial u_p}{\partial r} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u_p}{\partial t^2},$$

autrement dit celle qui détermine les solutions de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \sum_{i=1}^{2p+3} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2},$$

qui sont fonctions des seules variables t et $r = \sqrt{\sum x_i^2}$.

L'intégrale générale de cette équation (22) est connue : elle peut se mettre sous la forme

$$(23) \quad u_p = D^p \left[\frac{f(r-at) + \varphi(r+at)}{2} \right],$$

où D désigne l'opération $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$;

Ou encore ⁽¹⁾ (à un facteur numérique près)

$$u_{p-1} = \sum_{h=1}^p (-2)^{h-1} \frac{(2p-h-1)!}{(p-h)!(h-1)!} \frac{f^{(h-1)}(r-at) + \varphi^{(h-1)}(r+at)}{r^{2p-h}}$$

(les symboles $f^{(h-1)}$ et $\varphi^{(h-1)}$ représentent les dérivées successives de f, φ).

L'hypothèse que u et, par suite, u_{p-1} sont identiquement nuls pour $t \leq 1$, $r \geq R$ montre que chacune des fonctions φ peut être prise nulle. Si maintenant on demande que $\frac{\partial u_{p-1}}{\partial r}$ [lequel, en

⁽¹⁾ VOLTERRA, *Rendic. Acc. Lincei* : loc. cit., p. 167.

vertu de la formule (23), est de même forme générale que ru_p ; soit égal à zéro pour $r = R$, $t \geq 0$, on voit que la fonction f devra être (lorsque son argument est inférieur à $R - a\theta$) une solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants, autrement dit, une somme de termes exponentiels de la forme $\Lambda e^{s(r-at)}$, les s étant racines de l'équation

$$\sum_{h=1}^{p+1} (-2)^{h-1} \frac{(2p-h+1)!}{(p+1-h)! (h-1)!} (Rs)^h = 0.$$

Les racines de ces équations ne paraissent offrir aucune propriété simple, et une somme d'exponentielles de l'espèce précédente, divisées par des puissances de r , ne paraît vérifier aucune équation linéaire distincte de l'équation (14).

SUR CERTAINES ÉQUATIONS DES QUATRIÈME ET CINQUIÈME DEGRÉS;

Par M. LÉON AUTONNE.

INTRODUCTION.

Soit h_n une équation algébrique de degré n , $n > 3$,

$$f(x) = x^n + \frac{n}{1!} a_1 x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} a_2 x^{n-2} + \dots + a_n = 0$$

où les a sont des fonctions quelconques d'une variable t . Envisageons (au point de vue des théories de Galois et de M. Jordan) comme *rationnelles par définition* :

- 1° Toutes les constantes;
- 2° Les coefficients a de h_n .

Nommons alors G le groupe (au sens de Galois) de h_n ; on supposera G transitif et h_n irréductible.

Prenons maintenant une équation U de Riccati entre u et t

$$\frac{du}{dt} = u_0(t) + u u_1(t) + u^2 u_2(t),$$

qui admette, par hypothèse, pour intégrales les n racines

$$x_i \quad (i = 0, 1, \dots, n-1)$$

de h_n . Le rapport anharmonique de quatre x_i sera constant; h_n prendra le nom d'équation *anharmonique*.

Dans plusieurs Notes insérées aux *Comptes rendus* (7 mai 1883; 13 février 1899; 5 et 12 février 1900) et dans un Mémoire intitulé *Sur les équations algébriques dont toutes les racines sont intégrales d'une même équation de Riccati* (*Journal de Mathématiques*, 1900), j'ai construit les équations anharmoniques qui existent pour les divers degrés n .

Cette théorie générale a pour base les propriétés des groupes de substitutions de Galois et celles des groupes linéaires fractionnaires S d'ordre fini (groupes de MM. Jordan, Klein et Gordan), c'est-à-dire provenant de substitutions

$$\left| z \quad \frac{az+b}{cz+d} \right| \quad ad-bc \neq 0.$$

La construction effective de h_n est fondée sur les deux théorèmes suivants :

I. — *Le groupe G de h_n est isomorphe sans hémiedrie à l'un des groupes S .*

II. — *Toute h_n est de la forme $F(x, T) = 0$, où le polynôme à deux arguments F est à coefficients NUMÉRIQUES qui ne dépendent que de S . Il n'entre dans h_n qu'une fonction unique $T(t)$ de t , laquelle est rationnelle.*

La propriété de définition pour les équations anharmoniques (constance du rapport anharmonique de quatre racines quelconques) n'intervient qu'*a posteriori* et assez tardivement.

Voici maintenant ce que je me propose de montrer dans le présent Travail :

Pour les degrés peu élevés, $n = 4$ ou 5 , on peut parvenir aux théorèmes I et II et construire l'anharmonique par des procédés assez élémentaires et en prenant pour point de départ la propriété de définition.

Les résultats obtenus sont les suivants :

Quatrième degré.

Premier type de h_4 :

$$x^4 + 6Tx^2 + 4Tx - 3T^2 = 0;$$

le rapport anharmonique K des quatre racines est équi-anharmonique; G est le groupe alterné entre quatre lettres, isomorphe au groupe S tétraédrique.

Second type de h_4 :

$$x^4 + 6Tx^2 + 4Tx + T(T+1) = 0;$$

K est harmonique. G est isomorphe au groupe S dérivé, pour $m = 4$, des deux substitutions (groupe S_m)

$$\theta_m = \begin{vmatrix} z & \theta z \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \theta^m = 1; \quad \varepsilon = \begin{vmatrix} z & 1 \\ 1 & z \end{vmatrix}.$$

Troisième type :

$$(x^2 + q)^2 - p(2x - 1)^2 = 0$$

avec

$$\frac{1}{p} = (1 - T)^2 - (1 + T)^2 \left(\frac{K-1}{K+1} \right)^2,$$

$$\frac{1}{q} = \frac{(1 - T)^2 - \dots}{T}.$$

G est isomorphe à S_2 .

Cinquième degré.

h_5 s'obtient en éliminant ζ entre les deux équations

$$x = \frac{\zeta - 2}{\zeta(\zeta - 3) + 1}, \quad \zeta(\zeta^2 - 5\zeta + 5)^2 = T.$$

G est isomorphe à S_5 . h_5 est une équation de Galois.

Pour l'application des théorèmes I et II et des résultats ci-dessus, il importe de spécifier ce qui suit :

Je ne considère pas comme distinctes les h_n , qui ne diffèrent que par l'intervention d'une substitution

$$\mathfrak{R} = \begin{vmatrix} x & \frac{x A(t) + B(t)}{x C(t) + D(t)} \end{vmatrix},$$

$AD - BC \neq 0$; A, B, C, D = rationnelles.

$\mathfrak{R}$ ne trouble pas l'anharmonisme et ne change pas le groupe G .

Ainsi je profiterai de $\mathfrak{R}$ pour supposer constamment nulle la

somme des racines

$$x_0 + \dots + x_{n-1} = a_1 = 0$$

et pour multiplier x par un facteur rationnel, choisi de façon à simplifier h_n .

Il va sans dire que les résultats de la présente Note sont d'accord avec la théorie générale des équations anharmoniques, exposée dans mon Mémoire inséré au *Journal de Mathématiques* pour 1900.

CHAPITRE I.

QUATRIÈME DEGRÉ.

1°. Le groupe général $\mathfrak{G}$ des vingt-quatre substitutions entre quatre lettres x_1, x_2, x_3, x_4 peut être envisagé comme provenant des substitutions $\alpha, \beta, \delta, \varepsilon$, savoir

$$\begin{aligned} \alpha &= (12)(34), & \beta &= (13)(24), & [\alpha\beta = \beta\alpha = (14)(23)], \\ \delta &= (4)(123), & \varepsilon &= (1)(2)(34). \end{aligned}$$

Si ε manque, $\mathfrak{G}$ se réduit au groupe alterné d'ordre douze; si δ manque, $\mathfrak{G}$ se réduit à un groupe d'ordre huit; si δ et ε manquent simultanément, $\mathfrak{G}$ se réduit au groupe g des quatre substitutions $1, \alpha, \beta, \alpha\beta$.

2°. Posons

$$\{ij\} = x_i - x_j, \quad i, j = 1, 2, 3, 4;$$

considérons le rapport anharmonique

$$K = K_0 = \frac{\{31\}\{42\}}{\{32\}\{41\}}$$

des x_i et la façon dont K se transforme par les substitutions de $\mathfrak{G}$.

Soient

$$\tau_1 = \{23\}\{14\}, \quad \tau_2 = \{31\}\{24\}, \quad \tau_3 = \{12\}\{34\}, \quad \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0.$$

Voici la façon dont $\alpha, \beta, \delta, \varepsilon$ transforment les τ :

α et β n'altèrent pas τ_1, τ_2 ni τ_3 ; ensuite

$$\delta = (\tau_1 \tau_2 \tau_3) \quad \varepsilon = \begin{vmatrix} \tau_1 & -\tau_2 \\ \tau_2 & -\tau_1 \\ \tau_3 & -\tau_3 \end{vmatrix},$$

Nommons $\partial[K]$, ..., ce que devient K par l'effet de ∂ , ..., il viendra

$$\partial[K_0] = \partial\left[-\frac{\tau_2}{\tau_1}\right] = -\frac{\tau_3}{\tau_2} = \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_2} = \frac{K_0 - 1}{K_0} = K_1,$$

$$\partial[K_1] = -\frac{\tau_1}{\tau_3} = \frac{\tau_1}{\tau_1 + \tau_2} = \frac{1}{1 - K_0} = K_2, \quad \partial[K_2] = K_0,$$

$$\varepsilon[K_0] = -\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{1}{K_0} = K_3,$$

$$\varepsilon[K_1] = -\frac{\tau_3}{\tau_1} = \frac{1}{K_2} = K_4,$$

$$\varepsilon[K_2] = -\frac{\tau_2}{\tau_3} = \frac{1}{K_1} = K_5,$$

3°. Les déplacements des six lettres $K_0, \dots, K_5$ forment un groupe $\mathfrak{U}$ d'ordre six, isomorphe avec hémiedrie au groupe $\mathfrak{S}$ (1°).

A la substitution unité de $\mathfrak{U}$ correspond dans $\mathfrak{S}$ le groupe g ; ∂ a pour correspondante

$$\mathfrak{S} = (K_0 K_1 K_2)(K_3 K_4 K_5)$$

et ε a aussi pour correspondante

$$\mathfrak{S} = (K_0 K_3)(K_1 K_4)(K_2 K_5).$$

Se reportant à ma Note *Sur le rapport anharmonique*, insérée aux *Nouvelles Annales*, 1899, on verra que, lorsque les six quantités $K_0, \dots, K_5$ ne sont pas toutes distinctes, les quatre x étant toutes inégales, il ne peut se présenter que deux éventualités.

Cas équi-anharmonique. — $K_0 = K_1 = K_2$; $K_3 = K_4 = K_5$ et $K_0^2 - K_0 + 1 = 0$, d'où

$$K_0 = K_1 = K_2 = -\rho, \quad K_3 = K_4 = K_5 = -\rho^2$$

(ρ = racine primitive cubique de l'unité).

Cas harmonique. — Ce cas se décompose en trois :

$$K_0 = K_3 = -1, \quad K_1 = K_4 = -2, \quad K_2 = K_5 = -\frac{1}{2};$$

$$K_0 = K_5 = -2, \quad K_1 = K_3 = -\frac{1}{2}, \quad K_2 = K_4 = -1;$$

$$K_0 = K_5 = -\frac{1}{2}, \quad K_1 = K_4 = -1, \quad K_3 = K_2 = -2.$$

4°. Soit

$$a_0 x^4 + 4 a_1 x^3 + 6 a_2 x^2 + 4 a_3 x + a_4 = 0$$

l'équation du quatrième degré dont les x sont racines. Introduisons les deux invariants

$$I = 2(a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2),$$

$$J = 6(a_0 a_2 a_4 + 2 a_1 a_2 a_3 - a_2^3 - a_3^2 a_0 - a_1^2 a_4)$$

et l'invariant absolu

$$\Omega = I^3 J^{-2}$$

lié au rapport anharmonique K par la relation

$$\Omega = 24 \frac{(K^2 - K + 1)^3}{[(K + 1)(K - 2)(2K - 1)]^2}$$

(voir les *Leçons sur la Géométrie de Clebsch*, traduction A. Benoit, Tome I, pages 284, 285, 297).

Dans le cas équi-anharmonique

$$\Omega = I = 0, \quad K^2 - K + 1 = 0;$$

dans le cas harmonique

$$\Omega = \infty, \quad J = 0, \quad (K + 1)(K - 2)(2K - 1) = 0.$$

Il est évident d'ailleurs que les deux cas s'excluent mutuellement.

5°. Soient maintenant une anharmonique h_4 , $f(x) = 0$, et G son groupe entre les quatre racines x_i ($i = 1, 2, 3, 4$). G sera contenu dans le groupe $\mathfrak{S}$ du 1° ou coïncidera avec $\mathfrak{S}$.

On pourra écrire, sous le bénéfice des explications données dans l'Introduction,

$$f(x) = x^4 + 6 a_2 x^2 + 4 a_3 x + a_4.$$

Le polynome $f(x)$ aura les deux invariants (4°)

$$I = 2(a_4 + 3 a_2^2), \quad J = 6(a_2 a_4 - a_3^2 - a_2^3),$$

puisque $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$. Le rapport anharmonique K lié à l'invariant absolu $\Omega = I^3 J^{-2}$ par la relation

$$\Omega = 24 \frac{(K^2 - K + 1)^3}{[(K + 1)(K - 2)(2K - 1)]^2} \quad (4'')$$

est constant, c'est-à-dire rationnel. K ne doit pas changer par l'intervention des substitutions de G .

6°. Si G contient la substitution ternaire $\delta = (4)(123)$ du 1°, on a

$$\Omega = I = 0.$$

Il faut, en effet, alors que (3°)

$$K_0 = K_1 = \dots, \quad K_0^2 - K_0 + 1 = 0 \quad \text{et} \quad \Omega = 0.$$

Si G contient la substitution binaire $\varepsilon = (1)(2)(34)$ du 1°, on a

$$\Omega = \infty, \quad J = 0.$$

En effet, alors (3°)

$$K_0 = K_3, \quad K_0 + 1 = 0.$$

Comme les cas équi-anharmonique et harmonique s'excluent mutuellement, on voit que G est contenu :

soit dans le groupe alterné entre quatre lettres, dérivé de α, β, δ , avec $I = 0$,

soit dans le groupe d'ordre huit, dérivé de $\alpha, \beta, \varepsilon$, avec $J = 0$,

soit dans le groupe g d'ordre quatre, dérivé de α et β , $IJ \neq 0$.

Je dirai que l'anharmonique h_4 est équi-anharmonique si $I = 0$, harmonique si $J = 0$.

Je vais m'occuper de la construction des h_4 équi-anharmonique et harmonique.

7°. Dans h_4 le coefficient a_3 ne peut être nul et h_4 ne peut devenir bicarrée.

Les quatre racines seraient dans ce cas $u, v, -u, -v$. Exprimons qu'elles sont intégrales de l'équation U de Riccati; il viendra

$$\begin{aligned} u' &= \mathfrak{w}_0 + \mathfrak{w}_1 u + \mathfrak{w}_2 u^2 & -u' &= \mathfrak{w}_0 - \mathfrak{w}_1 u + \mathfrak{w}_2 u^2, \\ v' &= \mathfrak{w}_0 + \mathfrak{w}_1 v + \mathfrak{w}_2 v^2 & -v' &= \mathfrak{w}_0 - \mathfrak{w}_1 v + \mathfrak{w}_2 v^2, \end{aligned}$$

puis

$$0 = \mathfrak{w}_0 + \mathfrak{w}_2 u^2 = \mathfrak{w}_0 + \mathfrak{w}_2 v^2.$$

Comme on ne peut avoir $\mathfrak{w}_0 = \mathfrak{w}_2 = 0$, sans quoi l'on n'aurait

plus une équation de Riccati, il vient $u^2 - v^2 = 0$ et h_1 aurait des racines égales.

8°. Si $a_2 = 0$, h_1 ne peut être ni harmonique, ni équi-anharmonique. En effet alors

$$a_2 = 0, \quad I = 2a_1, \quad J = -6a_1^2.$$

Pour $I = 0$, $a_1 = 0$, et il y aurait une racine nulle; pour $J = 0$, $a_2 = 0$, ce qui est absurde (7°). C. Q. F. D.

Je supposerai donc, pour la construction des h_4 équi-anharmonique et harmonique, $a_2 a_3 \neq 0$.

9°. Multiplions, ce qui est licite (Introduction) x par le facteur rationnel r^{-1} ; h_1 devient

$$x^4 + 6a_2 r^2 x^2 + 4a_3 r^3 x + r^4 a_1 = 0.$$

Posons

$$T = a_2 r^2 = a_3 r^3,$$

d'où, puisque

$$a_2 a_3 \neq 0, \quad r = a_2 a_3^{-1}, \quad T = a_2^2 a_3^{-2}$$

et

$$f(x) = x^4 + 6Tx^2 + 4Tx + \mathfrak{C} = 0, \quad \mathfrak{C} = a_1 a_2^2 a_3^{-4}.$$

Alors

$$I = 2(\mathfrak{C} + 3T^2), \quad J = 6(T\mathfrak{C} - T^3 - T^2).$$

Si

$$I = 0, \quad \mathfrak{C} = -3T^2,$$

$$f(x) = x^4 + 6Tx^2 + 4Tx - 3T^2.$$

Si

$$J = 0, \quad \mathfrak{C} = T^2 + T,$$

$$f(x) = x^4 + 6Tx^2 + 4Tx + T(T + 1).$$

Dans l'un et l'autre cas $f(x)$ est un polynôme en x et T à coefficients numériques. C'est un résultat annoncé dans l'Introduction.

10°. Passons maintenant aux h_4 , où $IJ \neq 0$ et dont le groupe G coïncide avec le groupe g des quatre substitutions $1, \alpha, \beta, \alpha\beta$ (6°).

On aura d'abord

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0,$$

$$x_1 + x_2 - (x_3 + x_4) \neq 0,$$

sans quoi

$$0 = x_1 + x_2 = x_3 + x_4$$

et h_1 serait bicarrée, ce qui est absurde (7°).

L'expression

$$(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)^2 = 2^2 p,$$

invariable par α et β , est rationnelle; il en est de même pour

$$(o) \quad \begin{cases} x_1 x_2 + x_3 x_4 = 2q \\ \frac{x_1 x_2 - x_3 x_4}{x_1 + x_2 - x_3 - x_4} = \frac{1}{2} r. \end{cases}$$

De là

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2\sqrt{p} & \begin{cases} x_1 x_2 = q + r\sqrt{p} \end{cases} \\ x_3 + x_4 = -2\sqrt{p} & \begin{cases} x_3 x_4 = q - r\sqrt{p} \end{cases} \end{cases}$$

et

$$(o') \quad \begin{cases} x_1 = \sqrt{p} + \sqrt{p - q - r\sqrt{p}} = g + h \\ x_2 = \sqrt{p} - \sqrt{p - q - r\sqrt{p}} = g - h \\ x_3 = -\sqrt{p} + \sqrt{p - q + r\sqrt{p}} = -g + K \\ x_4 = -\sqrt{p} - \sqrt{p - q + r\sqrt{p}} = -g - K \end{cases}$$

$$g^2 = p \quad h^2 = p - q - r\sqrt{p}$$

$$K^2 = p - q + r\sqrt{p}.$$

11°. On peut faire $r = 1$. D'abord $r \neq 0$, sinon, par les formules (o') du 10°, $h = K$, $x_1 = -x_4$, $x_2 = -x_3$ et h , deviendrait bicarrée (7°).

Multiplions, ce qui est licite, x par r . On pourra diviser par r les deux membres de l'égalité (o) du 10°, ce qui revient à faire $r = 1$.

12°. Formons le rapport anharmonique

$$K = \frac{(x_3 - x_1)(x_4 - x_2)}{(x_3 - x_2)(x_4 - x_1)}.$$

Par les formules (o') du 10°, il viendra, tout calcul fait,

$$K = \frac{p + q + \Delta}{p + q - \Delta},$$

$\Delta^2 = (p - q)^2 - p$, puisque $r = 1$, et enfin

$$(1) \quad (p - q)^2 - p = (p + q)^2 \left[\frac{K - 1}{K + 1} \right]^2.$$

Comme (10°) $p \neq 0$, je poserai $q = pT$ et (1) devient

$$(2) \quad \begin{cases} p = \frac{1}{(1-T)^2 - \left(\frac{k-1}{k+1}\right)^2 (1+T)^2} \\ q = \frac{T}{(1-T)^2 - \left(\frac{k-1}{k+1}\right)^2 (1+T)^2} \end{cases}$$

13°. Construisons maintenant h , avec les formules du 10°. On a, puisque $R = 0$,

$$\begin{aligned} x_1 - g &= h, & g^2 &= p, \\ h^2 &= p - q - g, & k^2 &= p - q + g. \end{aligned}$$

d'où successivement

$$\begin{aligned} x_1^2 + p - 2x_1g &= h^2 = p - q - g, \\ x_1^2 + q &= g(2x_1 - 1), \\ (x_1^2 + q)^2 &= p(2x_1 - 1)^2. \end{aligned}$$

Toute autre racine donnerait le même résultat, et il vient pour h ,

$$f(x) = (x^2 + q)^2 - p(2x - 1)^2.$$

Mais, par les formules (2) du 12°, p et q sont rationnels en T et $f(x)$ est encore un polynôme en x et T à coefficients numériques.

14°. On sait que tous les groupes S linéaires, fractionnaires, d'ordre fini, appartiennent à cinq types différents :

I. *Circulaire* (*Kreistheilungsgruppe* de M. Klein), dérivé de l'unique substitution

$$\Theta_m = | \begin{smallmatrix} z & Rz \end{smallmatrix} |, \quad R^m = 1.$$

II. *Pyramidal*, dérivé de Θ_m et de

$$| \begin{smallmatrix} z & z^{-1} \end{smallmatrix} |,$$

(*Doppelpyramidengruppe* de M. Klein).

III. *Tétraédrique*, isomorphe sans hémiedrie au groupe alterné entre quatre lettres.

IV. *Octaédrique*, isomorphe sans hémiedrie au groupe général (1°) entre quatre lettres.

V. *Icosuédrique*, isomorphe sans hémicédrie au groupe alterné entre cinq lettres.

Or, dans le cas actuel, le groupe G de h_4 possède, en vertu de la discussion précédente, les propriétés suivantes :

Si h_4 est équi-anharmonique, G est le groupe alterné entre quatre lettres.

Si h_4 est harmonique, G provient de $\mathfrak{S}_5$ par la suppression de δ (1°); G est isomorphe au groupe pyramidal pour $m = 4$.

Si h_4 n'est ni harmonique ni équi-anharmonique, G dérive des substitutions α et β , $\alpha\beta = \beta\alpha$, $\alpha^2 = 1$, $\beta^2 = 1$ et est isomorphe au groupe pyramidal pour $m = 2$.

On retrouve ainsi des résultats annoncés dans l'Introduction.

CHAPITRE II.

CINQUIÈME DEGRÉ.

15°. Soit maintenant une h_5 , dont $x_0, x_1, \dots, x_4$ seront les cinq racines. Nommons G , le groupe de h_5 et G_0 le groupe des substitutions de G qui laissent x_0 immobile. Ces dernières doivent laisser fixe le rapport anharmonique

$$K^{-1} = \frac{(x_3 - x_1)(x_4 - x_2)}{(x_3 - x_2)(x_4 - x_1)}.$$

Je suppose que l'on ait démontré (ce qui se fera un peu plus loin) que K n'est ni harmonique ni équi-anharmonique. Alors G_0 ne pourra contenir (Chapitre I) ni $\delta = (1\ 2\ 3)(4)$ ni $\varepsilon = (1)(2)(3\ 4)$ et se réduira à g ou à un groupe contenu dans g . Ainsi G ne contiendra aucune substitution laissant immobile plus d'une racine; toutes les racines s'exprimeront rationnellement en fonction de deux quelconques d'entre elles, et, comme le degré est premier, h_5 sera une équation de Galois.

G étant transitif a son ordre divisible par cinq et contient la substitution circulaire

$$\sigma = (0\ 1\ 2\ 3\ 4) = |i, i+1| \pmod{5},$$

entre les cinq racines x_i , ($i = 0, 1, \dots, 4$). G s'obtient en com-

binant avec σ la substitution

$$\tau = |i, li| \pmod{5}.$$

Comme τ est contenue dans g , on a

$$\begin{aligned} \tau^2 &= 1, & l^2 &\equiv 1 \pmod{5}, \\ l &\equiv 4 \pmod{5}, \\ \tau &= |i, 4i| = (0)(14)(23) = \alpha\beta, \\ \tau^{-1}\sigma\tau &= \sigma^{-1}. \end{aligned}$$

G contient les dix substitutions

$$\sigma^k \text{ et } \tau\sigma^k, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

G est isomorphe, pour $m = 5$, au groupe pyramidal S du 14°.

16°. Reste à montrer que K n'est ni harmonique ni équi-anharmonique.

Posons

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \{14\}, & \mu_1 &= \{20\}, & \mu_2 &= \{31\}, & \mu_3 &= \{42\}, & \mu_4 &= \{03\}, \\ & & & & \{ij\} &= x_i - x_j. \end{aligned}$$

La substitution σ , qui ne saurait manquer dans le groupe G, permute les μ circulairement :

$$\sigma = (\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4).$$

On a

$$x_0 + \dots + x_4 = 0,$$

et aussi

$$\mu_0 + \dots + \mu_4 = 0.$$

Enfin par un calcul facile

$$o) \quad \begin{cases} 5x_0 = 2(\mu_4 - \mu_1) + \mu_2 - \mu_3, \\ 5x_1 = 2(\mu_0 - \mu_2) + \mu_3 - \mu_4, \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

Posons ensuite

$$\begin{aligned} a &= \mu_2\mu_3, & b &= \mu_3\mu_4, & c &= \mu_4\mu_0, & d &= \mu_0\mu_1, \\ e &= \mu_1\mu_2, & \mu &= \mu_0\dots\mu_4, \end{aligned}$$

d'où

$$\mu^2 = abcde,$$

et

$$\mu\mu_1 = bde, \quad \mu\mu_2 = cea, \quad \mu\mu_3 = dab, \quad \mu\mu_4 = ebc, \quad \mu\mu_0 = acd.$$

Remplaçant dans les formules (o) les μ par leurs valeurs, il viendra

$$(1) \quad \begin{cases} 5\mu x_0 = 2be(c-d) + a(ec-bd), \\ 5\mu x_1 = 2ca(d-e) + b(da-ce), \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

par permutation circulaire des cinq lettres a, b, c, d et e .

Remarquons que, si

$$a = b = c = d = e, \quad \mu x_0 = \mu x_1 = \dots = \mu x_4 = 0;$$

or

$$\mu^2 = abcde \neq 0;$$

il viendrait

$$x_0 = \dots = x_4 = 0,$$

ce qui est absurde. Aucune des cinq lettres $a, \dots, e$ n'est zéro, car alors une des cinq lettres $\mu_0, \dots, \mu_4$, serait nulle et h_3 aurait des racines égales.

17°. On a

$$K^{-1} = \frac{\begin{vmatrix} 31 & 42 \\ 32 & 41 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 31 & 42 \\ 32 & 41 \end{vmatrix}} = \frac{\mu_2 \mu_3}{\mu_0(\mu_1 + \mu_4)} = \frac{a}{d+c}.$$

$$-Ka + c + d = 0.$$

La substitution σ de G permute circulairement $a, \dots, e$ tout en laissant K invariable. Il vient ainsi le système des cinq équations linéaires homogènes

$$(2) \quad \begin{cases} -Ka + c + d = 0, \\ -Kb + d + e = 0, \\ a - Kc + e = 0, \\ a + b - Kd = 0, \\ b + c - Ke = 0. \end{cases}$$

Aucune des $a, \dots, e$ n'est zéro (16°); donc

$$\Delta = \begin{vmatrix} -K & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -K & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -K & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -K & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -K \end{vmatrix} = (K-2)(K^2+K-1)^2 = 0.$$

Si $K = 2$, $a = b = \dots = e$, ce qui est absurde (16° *in fine*).
Ainsi

$$K^2 + K - 1 = 0.$$

Nommons θ une racine primitive cinquième de l'unité et soit $\rho = \theta + \theta^4$, $\rho^2 = 2 + \theta^2 + \theta^3$ et, en vertu de $\theta^5 + \dots + \theta + 1 = 0$, $\rho^2 + \rho - 1 = 0$. Les deux valeurs de K sont donc

$$K = \theta + \theta^4 \quad \text{et} \quad K = \theta^2 + \theta^3.$$

On n'est ni dans le cas équi-anharmonique ni dans le cas harmonique.
C. Q. F. D.

18°. Si on annule $K^2 + K - 1$, en faisant par exemple $K = \theta + \theta^4$, tous les premiers mineurs du déterminant Δ (17°) sont nuls; a, b, c, d, e s'expriment en vertu des équations (2) du 17°, par des fonctions linéaires, homogènes, à coefficients numériques, de deux indéterminées u et v . Les substitutions σ et τ du groupe G (15°) se traduisent sur u et v par les deux substitutions linéaires homogènes s et $\bar{s}$. On peut toujours supposer s mise sous forme canonique; comme $\sigma^5 = 1$, $s^5 = 1$ et

$$s = \begin{vmatrix} u & \theta^2 u \\ v & \theta^3 v \end{vmatrix}.$$

Comme $\tau^2 = 1$, $\tau\sigma\tau = \sigma^{-1}$, on a aussi $\bar{s}^2 = 1$, $\bar{s}s\bar{s} = s^{-1}$ c'est-à-dire, par un calcul facile,

$$\bar{s} = \begin{vmatrix} u & v \\ v & u \end{vmatrix}$$

et

$$\alpha + \beta \equiv 0 \pmod{5}.$$

$\bar{s}$ doit permuter $a, b, \dots, e$ de la façon suivante

$$\tau = (a)(be)(cd)$$

et s ainsi

$$\sigma = (abcde).$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} a &= u + v, & c &= \theta^2 \alpha u + \theta^3 \beta v, \\ b &= \theta^2 u + \theta^3 v, & d &= \theta^3 \alpha u + \theta^2 \beta v, \\ e &= \theta^3 \alpha u + \theta^2 \beta v, \end{aligned}$$

Portons dans la première des équations (2) du 17^e, il viendra

$$Ka = c + d,$$

$$\text{d'où} \quad (\theta + \theta^4)(u + v) = (\theta^{22} + \theta^{32})u + (\theta^{23} + \theta^{33})v,$$

$$\text{ou bien} \quad \alpha \equiv 2, \quad \beta \equiv 3 \pmod{5}$$

$$\alpha \equiv 3, \quad \beta \equiv 2 \pmod{5}.$$

Je prendrai $\alpha \equiv 2$. On aura ainsi

$$(1) \quad \begin{cases} a = u + v, \\ b = \theta^2 u + \theta^3 v, \\ c = \theta^4 u + \theta v, \\ d = \theta u + \theta^4 v, \\ e = \theta^3 u + \theta^2 v. \end{cases}$$

L'équation du cinquième degré qui admet a, b, c, d, e pour racines est

$$\Lambda(\lambda) = \lambda^5 - 5uv\lambda^3 + 5u^2v^2\lambda - (u^5 + v^5) = 0.$$

19^e. Ainsi les deux substitutions $\sigma = (01234)$ et $\tau = (0)(14)(23)$ de G se traduisent sur les μ par les deux substitutions $(\mu_0\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4)$ et

$$\begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 \\ -\mu_0 & -\mu_1 & -\mu_2 & -\mu_3 & -\mu_4 \end{vmatrix};$$

sur les $a, \dots, e$ par les deux substitutions $(abcde)$ et $(a)(be)(cd)$;
sur u et v par les deux substitutions

$$S = \begin{vmatrix} u & \theta^2 u \\ v & \theta^3 v \end{vmatrix}, \quad \mathfrak{S} = \begin{vmatrix} u & v \\ v & u \end{vmatrix}.$$

Enfin $\mu = \mu_0\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4$, $\mu^2 = abcde$, reste invariable par σ et change de signe par τ .

Les deux expressions $u^5 + v^5 = p$ et $uv = q$ sont invariables par S et $\mathfrak{S}$, c'est-à-dire par toutes les substitutions de G . p et q sont donc *rationnelles*.

Les deux quantités d'un des cinq couples

$$\begin{aligned} a, & x_0, \\ b, & x_1, \\ c, & x_2, \\ d, & x_3, \\ e, & x_4, \end{aligned}$$

sont invariables par les mêmes substitutions de G. Donc

$$x_0 = \psi(a),$$

ψ désignant une fraction rationnelle à coefficients rationnels. Effectuons la substitution σ sur l'expression

$$x_0 - \psi(a),$$

qui est nulle, c'est-à-dire à valeur rationnelle, on aura

$$\begin{aligned} x_1 &= \psi(b), \\ &\dots\dots\dots, \\ x_4 &= \psi(e). \end{aligned}$$

Construisons ψ .

20°. Portons les valeurs de $a, \dots, e$ données par les formules (1) du 18°, dans les formules (1) du 16°. Il viendra, tout calcul fait,

$$\begin{aligned} 5\mu x_0 &= R(u - v)(u^2 + v^2), \\ R &= 2(\theta^2 - \theta^3) + \theta - \theta^4. \end{aligned}$$

L'expression $\frac{u^5 - v^5}{\mu} = r$ est invariable par toutes les substitutions de G, c'est-à-dire rationnelle.

Le quotient $(u^5 - v^5)(u - v)^{-1}$ est égal à

$$u^4 + u^3v + u^2v^2 + uv^3 + v^4 = u^4 + v^4 + uv(u^2 + v^2) + u^2v^2.$$

Or

$$uv = q, \quad u + v = a;$$

donc

$$\frac{u^5 - v^5}{u - v} = a^2(a^2 - 3q) + q^2.$$

Alors

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{R(u-v)(u^2+v^2)}{5\mu} = \frac{Rr(u-v)(u^2+v^2)}{5(u^2-v^2)} \\ &= \frac{rR}{5} \cdot \frac{a^2-2q}{a^2(a^2-3q)+q^2} = \psi(a); \end{aligned}$$

d'où

$$\psi(X) = \frac{rR}{5} \cdot \frac{X^2-2q}{X^2(X^2-3q)+q^2},$$

X étant une indéterminée.

21°. Posons $a^2 = q\zeta$, on aura

$$x_0 = \frac{Rr}{5q} \cdot \frac{\zeta-2}{\zeta(\zeta-3)+1}$$

Mais a est racine de l'équation (18° *in fine*)

$$\Lambda(a) = a(a^4 - 5qa^2 + 5q^2) - p = 0,$$

puisque

$$uv = q, \quad u^5 + v^5 = p \quad (19^\circ).$$

Alors

$$\begin{aligned} q^2 a(\zeta^2 - 5\zeta + 5) &= p \\ \zeta(\zeta^2 - 5\zeta + 5)^2 &= \frac{p^2}{q^2} = T. \end{aligned}$$

Si, au lieu de raisonner sur x_0 et a , on avait raisonné sur x_1 et b , x_2 et c , ... on aurait eu les mêmes résultats.

22°. En résumé, l'équation h_5 s'obtient en éliminant ζ entre les deux équations

$$x = \frac{Rr}{5q} \cdot \frac{\zeta-2}{\zeta(\zeta-3)+1}, \quad \zeta(\zeta^2-5\zeta+5)^2 = T.$$

Il est licite de multiplier tous les x par le facteur rationnel

$$\frac{Rr}{5q};$$

cela revient à faire $\frac{Rr}{5q} = 1$.

On a à éliminer ζ entre

$$[\zeta(\zeta^2-5\zeta+5)^2 = T \quad \text{et} \quad x = \frac{\zeta-2}{\zeta(\zeta-3)+1}.$$

Le résultant est bien un polynome du cinquième degré entre ζ

et T à coefficients numériques. La relation algébrique entre x et T est du degré zéro.

23°. L'équation du cinquième degré qui vient d'être construite est-elle effectivement une anharmonique? Autrement dit, tous les rapports anharmoniques formés avec quatre racines quelconques sont-ils constants?

Il faut répondre par l'affirmative. Donnons, en effet, le nom de $\mathfrak{U}_i$ au système des six rapports anharmoniques distincts, formés par les quatre racines autres que x_i . On a vu au Chapitre I que tous les termes de $\mathfrak{U}_i$ sont des fonctions rationnelles à coefficients numériques d'un quelconque d'entre eux.

Toute l'analyse du présent Chapitre II a eu pour but de montrer la constance du rapport anharmonique K du 15°. K est un terme de $\mathfrak{U}_0$. La substitution σ de G , qui permute circulairement les cinq systèmes $\mathfrak{U}_i (i = 0, 1, \dots, 4)$ ne change pas la valeur numérique constante, c'est-à-dire rationnelle, de K . Chacun des cinq systèmes $\mathfrak{U}_i$ a un terme constant, c'est-à-dire tous ses termes constants.

C. Q. F. D.

Nous avons ainsi établi les résultats annoncés dans l'Introduction.

SUR LES CHANGEMENTS DE VARIABLES ;

Par M. JULES BEUDON.

Ce Travail a pour objet l'étude des quadratures dont l'élément différentiel contient des fonctions arbitraires (¹). Cet algorithme s'est présenté depuis longtemps dans les résultats de l'intégration d'équations aux dérivées partielles; dans un très petit nombre de cas, on a effectué la quadrature au moyen d'un changement de variables convenablement choisi; mais on ne possède aucune méthode générale pouvant servir de guide dans les essais.

(¹) Le principe de la méthode employée dans cette étude a été donné dans une Note des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (15 mai 1899).

Je traite deux cas généraux, à savoir

$$\int \varphi(x, y, y') dx, \quad \int [\varphi(x, y, y') y'' + \psi(x, y, y')] dx,$$

$$y' = \frac{dx}{dy}, \quad y'' = \frac{d^2 y}{dx^2},$$

où φ et ψ sont des fonctions données de leurs arguments, et y une fonction arbitraire de x . Je termine par un exemple simple auquel la méthode que je propose s'applique complètement.

I.

1. Rappelons d'abord quelques propositions classiques. A une équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$(1) \quad f(x, y, z, p, q) = 0$$

correspond en général une équation de Monge,

$$(2) \quad \varphi\left(x, y, z, \frac{dy}{dz}, \frac{dz}{dx}\right) = 0,$$

dont l'interprétation géométrique est la suivante : elle représente l'ensemble des enveloppes de caractéristiques sur les surfaces intégrales.

Si l'on connaît une intégrale complète $F(x, y, z, \alpha, \beta) = 0$ de l'équation aux dérivées partielles (1), les courbes définies par l'équation (2) peuvent être représentées par les équations

$$F[x, y, z, \alpha, \psi(\alpha)] = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial \psi} \psi'(\alpha) = 0, \quad \frac{d}{d\alpha} \left[\frac{\partial F}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial \psi} \psi'(\alpha) \right] = 0$$

permettant de calculer x, y, z en fonction du paramètre α , et ψ étant une fonction arbitraire de α .

Réciproquement, pour intégrer une équation de Monge

$$(3) \quad \varphi_1\left(x, y, z, \frac{dy}{dz}, \frac{dz}{dx}\right) = 0$$

non linéaire, on posera

$$\frac{dz}{dx} = p + q \frac{dy}{dx};$$

en écrivant que

$$\varphi_1\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}, p + q \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

a une racine double en $\frac{dy}{dx}$, on aura une équation aux dérivées partielles

$$(4) \quad f_1(x, y, z, p, q) = 0.$$

La connaissance d'une intégrale complète de l'équation (4) permettra de résoudre l'équation (3), comme il a été dit précédemment.

2. Soit la quadrature

$$(5) \quad \int \varphi(x, y, y') dx$$

Si la fonction φ est linéaire en y' , soit $\varphi = A(x, y) + B(x, y)y'$, on résoudra l'équation de Pfaff,

$$A(x, y) dx + B(x, y) dy = dz$$

en utilisant la méthode bien connue.

Si la fonction φ n'est pas linéaire, on posera

$$(6) \quad \varphi(x, y, y') = \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \lambda}{\partial y} y' + \frac{\partial \lambda}{\partial z} z'$$

où λ est une fonction quelconque de x, y, z . Si l'on peut déterminer λ de manière que l'équation de Monge (6) puisse être intégrée, la quadrature (5) sera effectuée.

II.

3. J'ai montré, dans ma Thèse de Doctorat ⁽¹⁾, que les systèmes en involution d'équations aux dérivées partielles du second ordre en involution ont les mêmes propriétés que les équations du premier ordre, relativement aux caractéristiques, et j'ai montré qu'ils pouvaient servir à l'intégration d'équations de Monge d'ordre supérieur.

⁽¹⁾ *Annales de l'École Normale*, Supplément; 1896, page 33.

Il y a pourtant une différence essentielle entre le premier ordre et les suivants : à toute équation $f(x, y, z, y', z') = 0$ correspond en général une équation aux dérivées partielles du premier ordre, tandis qu'à une équation $f(x, y, z, y', z', y'', z'') = 0$ ne correspond pas en général un système en involution, et cela même lorsque la relation f est linéaire en y'' et z'' . M. Goursat s'est occupé de ces équations dans un Mémoire publié dans le *Journal de l'École Polytechnique* (1); je ferai usage de ses formules.

4. Tout système linéaire et du second ordre en involution peut être mis sous la forme

$$(7) \quad r + \lambda s + \mu = 0, \quad s + \lambda t + v = 0,$$

λ, μ, v étant des fonctions de x, y, z, p, q vérifiant les deux conditions suivantes :

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{\partial \lambda}{\partial z} (p + \lambda q) - (\mu + \lambda v) \frac{\partial \lambda}{\partial p} \\ \quad + \lambda \frac{\partial \mu}{\partial p} - \frac{\partial \mu}{\partial q} + \lambda^2 \frac{\partial v}{\partial p} - \lambda \frac{\partial v}{\partial q} = 0, \\ \lambda \left(\frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial \mu}{\partial z} q - \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial z} p + \mu \frac{\partial v}{\partial p} \right) \\ \quad + v \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \lambda}{\partial z} p - \mu \frac{\partial \lambda}{\partial p} - \frac{\partial \mu}{\partial q} \right) = 0. \end{cases}$$

L'équation de Monge généralisée, attachée au système, s'obtient en éliminant p et q entre les équations

$$(9) \quad y' = \lambda, \quad z' = p + q y', \quad z'' = q y'' - \mu - v y'.$$

M. Goursat a montré (*loc. cit.*) que l'intégrale générale du système (7) est de la forme

$$(10) \quad \Phi[x, y, z, f(x), f'(x), f''(x)] = 0,$$

on aura l'intégrale de l'équation de Monge en écrivant

$$(11) \quad \Phi = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$$

(1) *Journal de l'École Polytechnique*, 11^e Série, 3^e Cahier; 1897.

5. Soit la quadrature

$$(12) \quad J = \int [M(x, y, y') y'' - N(x, y, y')] dx;$$

Posons

$$(13) \quad M(x, y, y') y'' - N(x, y, y') = \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \alpha}{\partial y} y' + \frac{\partial \alpha}{\partial y'} y'' + z'',$$

α étant une fonction de x, y, y' et z une fonction de x .

Est-il possible de déterminer la fonction α de manière que l'équation de Monge (13) provienne d'un système en involution tel que (7)?

Pour la commodité des calculs, nous restreindrons la généralité du système (7), en supposant que λ, μ, ν ne dépendent que de x, y, q ; les conditions d'intégrabilité deviennent

$$(14) \quad \begin{cases} \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \lambda}{\partial y} - \frac{\partial \mu}{\partial q} - \lambda \frac{\partial \nu}{\partial q} = 0, \\ \lambda \left(\frac{\partial \mu}{\partial y} - \frac{\partial \nu}{\partial x} \right) + \nu \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} - \frac{\partial \mu}{\partial q} \right) = 0. \end{cases}$$

On peut écrire autrement ces conditions, en prenant pour nouvelles variables x, y, y' , le changement de variables étant défini par la relation

$$F(x, y, y') = q,$$

la fonction F étant la fonction implicite définie par

$$y' = \lambda(x, y, q);$$

on aura

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial q} = 1.$$

Les deux conditions d'intégrabilité prennent la forme nouvelle

$$(15) \quad \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} + y' \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial \mu}{\partial y'} + y' \frac{\partial \nu}{\partial y'} = 0, \\ y' \left(\frac{\partial \mu}{\partial y} - \frac{\partial \nu}{\partial x} \right) \frac{\partial F}{\partial y'} - y' \frac{\partial \mu}{\partial y'} \frac{\partial F}{\partial y} - \left(\nu - y' \frac{\partial \nu}{\partial y'} \right) \frac{\partial F}{\partial x} - \nu \frac{\partial \mu}{\partial y'} = 0 \end{cases}$$

et l'équation de Monge, du système (7), devient

$$(16) \quad z'' = y'' F(x, y, y') - \mu - \nu y'.$$

On aura donc, pour déterminer les fonctions λ , μ , ν et α , les conditions

$$(17) \quad \begin{cases} F(x, y, y') = M(x, y, y') - \frac{\partial \alpha}{\partial y'}, \\ \mu + \nu y' = N(x, y, y') + \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \alpha}{\partial y'} y', \end{cases}$$

auxquelles il faut joindre les équations (15).

D'abord

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial y'}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y \partial y'}, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\partial M}{\partial y'} - \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y'^2},$$

et la première des équations (15) s'écrit

$$(18) \quad \frac{\partial M}{\partial x} + y' \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial y'} - y' \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y \partial y'} + \frac{\partial \mu}{\partial y'} + y' \frac{\partial \nu}{\partial y'} = 0$$

et, en différentiant par rapport à y' la seconde équation (17), on obtient

$$\frac{\partial \mu}{\partial y'} + y' \frac{\partial \nu}{\partial y'} + \nu = \frac{\partial N}{\partial y'} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial y'} + \frac{\partial \alpha}{\partial y} + y' \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y \partial y'};$$

d'où, en tenant compte de (18),

$$(19) \quad \nu = \frac{\partial M}{\partial x} + y' \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial y'} + \frac{\partial \alpha}{\partial y}$$

et, par suite, à cause de (17),

$$(20) \quad \mu = N - y' \frac{\partial M}{\partial x} - y' \frac{\partial N}{\partial y} - y'^2 \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial \alpha}{\partial x}.$$

Si nous portons ces valeurs dans la seconde condition d'intégrabilité (15), nous obtiendrons une équation aux dérivées partielles du second ordre, définissant la fonction $\alpha(x, y, y')$, et que je crois inutile d'écrire.

Soit

$$\Lambda \left(x, y, y', \frac{\partial \alpha}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y'^2} \right) = 0,$$

cette équation; si l'on en connaît une intégrale particulière $\alpha_1(x, y, y')$, on en déduira λ , μ et ν en fonction de x, y, y' , et l'on reviendra à x, y, q , grâce à l'égalité

$$\lambda(x, y, q) = y'.$$

On sera donc ramené à l'étude du système en involution (7).

III.

Voici l'exemple annoncé dans l'Introduction. Soient les deux quadratures

$$X = \int \frac{du}{1+uu_1}, \quad Y = \int \frac{du_1}{1+uu_1},$$

où u et u_1 sont des fonctions arbitraires d'une même variable. Prenons $u = x$ comme variable indépendante, et posons

$$\frac{1}{1+xu_1} = y',$$

y' étant la dérivée d'une fonction arbitraire y de x . Nous aurons

$$u_1 = \frac{1}{xy_1} - \frac{1}{x}, \quad u'_1 = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 y'} - \frac{y''}{xy'^2},$$

$$\frac{u'_1}{1+uu_1} = -\frac{1}{x^2} + \frac{y'}{x^2} - \frac{y''}{xy'}.$$

D'où

$$X = y, \quad Y = \frac{1}{x} - \int \left(\frac{y''}{xy'} - \frac{y'}{x^2} \right) dx,$$

Si nous appliquons la méthode précédente, nous aurons

$$M = \frac{1}{xy}, \quad N = \frac{y'}{x^2}, \quad F(x, y, y') = \frac{1}{xy} - \frac{\partial x}{\partial y'},$$

$$\nu = \frac{\partial x}{\partial y} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 y'}, \quad \mu = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{1}{x^2}.$$

En portant dans la seconde condition d'intégrabilité (15) il vient

$$(21) \quad \left(\frac{2}{x^3} - \frac{2y'}{x^2} \right) \frac{\partial^2 x}{\partial y'^2} - \frac{1}{x^2 y'} \frac{\partial^2 x}{\partial x \partial y'} - \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 x}{\partial y \partial y'} - \frac{1}{x^4 y'} + \frac{1}{x^2 y'} \frac{\partial x}{\partial y} = 0.$$

On trouve aisément la solution particulière $\frac{y'}{x}$, qui permet de supprimer le terme ne contenant pas de dérivés, soit $\frac{1}{x^4 y'}$; dans la nouvelle équation, on aperçoit aussi la solution $\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial y} y'$, où ρ est une fonction arbitraire de x et y . Supposons enfin que x ne

dépende pas de y ; il vient

$$2y'(1-y')x \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y'^2} - x^2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial y'} - 1 = 0$$

ou, en posant $\frac{\partial \alpha}{\partial y'} = \beta$,

$$2y'(1-y')x \frac{\partial \beta}{\partial y'} - x^2 \frac{\partial \beta}{\partial x} - 1 = 0.$$

dont l'intégrale générale est

$$\beta = \frac{1}{x} + f\left(\frac{x^2 y'}{y' - 1}\right).$$

Nous obtenons donc facilement pour α la solution très étendue

$$\alpha = \frac{y'}{x} + \int f\left(\frac{x^2 y'}{y' - 1}\right) dy' + \frac{\partial \rho}{\partial x} + y' \frac{\partial \rho}{\partial y},$$

mais nous n'avons pas l'intégrale la plus générale. Choisissons la solution la plus simple, soit $\alpha = \frac{y'}{x}$; alors

$$v = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2 y'}, \quad \mu = -\frac{y'}{x^2} + \frac{1}{x^2}, \quad q = \frac{1}{xy'} - \frac{1}{x},$$

et nous avons à étudier le système en involution

$$(22) \quad \begin{cases} r + \frac{s}{q x + 1} + \frac{q}{x(q x + 1)} = 0, \\ s + \frac{t}{q x + 1} - \frac{q}{x} = 0. \end{cases}$$

Appliquons à ce système la transformation d'Ampère, définie par les relations

$$x = x_1, \quad y = -q_1, \quad z = y_1 q_1 - z_1, \quad p = -p_1, \quad q = -y_1$$

et prolongée au moyen des identités

$$-r_1 dx_1 - s_1 dy_1 = r dx + s dy, \quad dy = -s_1 dx_1 - t_1 dy_1.$$

Alors

$$s = \frac{s_1}{t_1}, \quad r = -r_1 + \frac{s_1^2}{t_1}, \quad t = \frac{1}{t_1},$$

et le système (22) devient

$$(23) \quad \begin{cases} s_1 + t_1 \frac{y_1}{x_1} + \frac{1}{1 - x_1 y_1} = 0, \\ r_1 + s_1 \frac{y_1}{x_1} + \frac{y_1}{x_1(1 - x_1 y_1)} = 0. \end{cases}$$

Faisons encore le changement de variables

$$x_0 = \frac{y_1}{x_1}, \quad y_0 = x_1 y_1, \quad z_0 = z_1;$$

nous obtenons

$$(24) \quad \begin{cases} t_0 + \frac{y_0}{2y_0} + \frac{1}{2y_0(y_0 - 1)} = 0, \\ s_0 - \frac{p_0}{2y_0} = 0. \end{cases}$$

La seconde équation du système (24) donne d'abord

$$p_0 = \varphi'(x_0) \sqrt{y_0},$$

où φ' est la dérivée d'une fonction arbitraire φ de x_0 ; donc

$$z_0 = \varphi(x_0) \sqrt{y_0} + \psi(y_0),$$

ψ étant une nouvelle fonction arbitraire.

Portons dans la première des équations (24), il vient

$$\frac{d^2 \psi}{dy_0^2} + \frac{1}{2y_0} \frac{d\psi}{dy_0} + \frac{1}{2y_0(1 - y_0)} = 0.$$

On intègre facilement cette équation, dont la solution générale est

$$\psi = 2C \sqrt{y_0} - \sqrt{y_0} \log \frac{\sqrt{y_0} - 1}{\sqrt{y_0} + 1} - \log(y_0 - 1) + C_1,$$

d'où

$$z_0 = \varphi(x_0) \sqrt{y_0} - \sqrt{y_0} \log \frac{\sqrt{y_0} - 1}{\sqrt{y_0} + 1} - \log(y_0 - 1) + C_1.$$

En remontant la suite des calculs, on trouve

$$\begin{aligned} z_1 &= \varphi\left(\frac{y_1}{x_1}\right) \sqrt{x_1 y_1} - \sqrt{x_1 y_1} \log \frac{\sqrt{x_1 y_1} - 1}{\sqrt{x_1 y_1} + 1} - \log(x_1 y_1 - 1) + C_1, \\ -y &= y_1 = \frac{1}{x_1} \varphi\left(\frac{y_1}{x_1}\right) \sqrt{x_1 y_1} + \frac{x_1}{2\sqrt{x_1 y_1}} \varphi\left(\frac{y_1}{x_1}\right) - \frac{x_1}{2\sqrt{x_1 y_1}} \log \frac{\sqrt{x_1 y_1} - 1}{\sqrt{x_1 y_1} + 1}, \end{aligned}$$

et

$$z = q_1 y_1 - z_1 = \frac{y_1}{x_1} \sqrt{x_1 y_1} \varphi' \left(\frac{y_1}{x_1} \right) - \frac{1}{2} \sqrt{x_1 y_1} \log \frac{\sqrt{x_1 y_1} - 1}{\sqrt{x_1 y_1} + 1} \\ + \log(x_1 y_1 - 1) - \frac{1}{2} \sqrt{x_1 y_1} \varphi \left(\frac{y_1}{x_1} \right),$$

ce qui fournit l'intégrale générale du système (22).

Posons $\frac{y_1}{x_1} = \alpha$, α étant un paramètre; comme $x = x_1$, les caractéristiques du système (22) sont

$$-y = \sqrt{\alpha} \varphi'(\alpha) + 2\sqrt{\alpha} \varphi(\alpha) + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \log \frac{x\sqrt{\alpha} - 1}{x\sqrt{\alpha} + 1} \\ z = \alpha^{\frac{3}{2}} x \varphi'(\alpha) - \frac{x}{2} \sqrt{\alpha} \varphi(\alpha) - \frac{1}{2} x \sqrt{\alpha} \log \frac{x\sqrt{\alpha} - 1}{x\sqrt{\alpha} + 1} + \log(\alpha x^2 - 1).$$

Posons enfin

$$\varphi(\alpha) = \frac{\psi(\alpha)}{\sqrt{\alpha}},$$

il vient

$$(25) \quad \begin{cases} -y = \psi'(\alpha) + \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \log \frac{x\sqrt{\alpha} - 1}{x\sqrt{\alpha} + 1}, \\ z = x[\alpha\psi'(\alpha) - \psi(\alpha)] - \frac{1}{2} x \sqrt{\alpha} \log \frac{x\sqrt{\alpha} - 1}{x\sqrt{\alpha} + 1} + \log(\alpha x^2 - 1). \end{cases}$$

On obtiendra la relation qui unit x et α en cherchant l'enveloppe des caractéristiques, c'est-à-dire en différentiant l'une ou l'autre des équations (25) par rapport à α . On obtient (comme on peut le vérifier) le même résultat dans les deux cas, à savoir

$$(26) \quad 0 = \psi''(\alpha) - \frac{1}{4} \frac{x}{\alpha^{\frac{3}{2}}} \log \frac{x\sqrt{\alpha} - 1}{x\sqrt{\alpha} + 1} + \frac{1}{2\alpha(\alpha x^2 - 1)};$$

et les deux quadratures sont

$$X = y, \quad Y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} - \frac{\partial z}{\partial x}.$$

**SUR LES SURFACES CUBIQUES AYANT UN AXE DE SYMÉTRIE TERNAIRE
ET SUR LES SURFACES CUBIQUES
POSSÉDANT DES POINTS A INDICATRICE DU TROISIÈME ORDRE;**

Par M. DUMONT.

L'équation générale des surfaces du troisième ordre possédant un axe de symétrie ternaire est

$$(1) \quad \begin{cases} 6Axyx + B(x^3 + y^3 + z^3) + 3C(x^2y + xy^2 + y^2z + yz^2 + z^2x + zx^2) \\ + 3D(x^2 + y^2 + z^2) + 6E(xy + yz + zx) + 3F(x + y + z) + G = 0, \end{cases}$$

si cet axe est la droite bissectrice du trièdre $Oxyx$ et

$$(2) \quad hz^3 + 3kz^2 + 3lz + r + 3m(x^2 + y^2)z + px(3y^2 - x^2) + 3q(x^2 + y^2) = 0,$$

ou bien

$$(2') \quad 3(mz + px + q)y^2 + hz^3 + 3mx^2z - px^3 + 3kz^2 + 3qx^2 + 3lz + r = 0,$$

si l'axe de symétrie est Oz et que Oy soit pris parallèle à l'une des directions asymptotiques des sections $z = \lambda$. Ces équations sont à six paramètres, mais peuvent être ramenées à cinq par un transport de l'origine ayant pour effet d'annuler G ou r .

Pour toute valeur z_1 de z , on a une section dont les asymptotes forment un triangle équilatéral dont le centre est sur Oz et pour les trois valeurs de z racines de l'équation

$$(3) \quad hz^3 + 3kz^2 + 3lz + r + \frac{4}{p^2}(mz + q)^2 = 0,$$

les sections sont des triangles $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ et $A_3B_3C_3$ dont les côtés sont trois à trois dans trois plans formant un trièdre. Par exemple les côtés A_1B_1 , A_2B_2 , A_3B_3 étant supposés ceux qui sont parallèles à Oy , sont dans un plan $mz + px + q = 0$ coupant Oz au point $z = -\frac{q}{m}$ par lequel passent aussi les plans

$$(B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3) \quad \text{et} \quad (C_1A_1, C_2A_2, C_3A_3).$$

Les surfaces à axe de symétrie ternaire se présentent donc comme un cas particulier des surfaces possédant trois points en ligne droite tels que, pour chacun d'eux, le plan tangent coupe la surface suivant trois droites concourantes. Ici, ces trois points

sont sur la droite de l'infini des plans perpendiculaires à Oz ; en l'un d'eux concourent $A, B_1, A_2 B_2, A_3 B_3$, en un second $B, C_1, B_2 C_2, B_3 C_3$ et en un troisième $C, A_1, C_2 A_2$ et $C_3 A_3$.

Un point en lequel la surface est coupée par son plan tangent suivant trois droites concourantes n'a plus une indicatrice du second ordre, mais du troisième.

Désignons un tel point par I_3 . On voit qu'une transformation homographique change la surface à symétrie ternaire en une surface possédant trois points I_3 , en ligne droite, à distance finie. Réciproquement :

THÉOREME. — *Toute surface cubique possédant trois points I_3 sur une droite d à distance finie, pour chacun desquels les trois droites du plan tangent sont réelles, peut être transformée homographiquement en une surface à axe de symétrie ternaire.*

Soient I_3, I'_3, I''_3 les trois points, a, b, c les droites du plan tangent en I_3 , a', b', c' et a'', b'', c'' les droites analogues pour I'_3 et I''_3 . Chacune des droites de l'un des groupes coupe une de celles des deux autres groupes. Supposons que a coupe a' et a'' , que b coupe b' et b'' et que c coupe c' et c'' .

On peut d'abord transformer homologiquement de façon que les trois triangles $(aa'a'')$, $(bb'b'')$, $(cc'c'')$ deviennent équilatéraux. Si, en effet, dans un plan P passant par d l'on décrit sur $I_3 I'_3$ et sur $I'_3 I''_3$ des segments capables de 60° , puis que l'on prenne le point d'intersection O des deux arcs pour centre d'homologie, que le plan d'homologie soit parallèle à la droite d et le paramètre de la transformation tel que la transformée de d soit la droite à l'infini du plan P , les droites concourant en I_3 , en I'_3 et en I''_3 auront respectivement comme transformées des parallèles à OI_3 , à OI'_3 et à OI''_3 , c'est-à-dire des droites faisant entre elles des angles de 60° . Par suite, les transformés des triangles $(aa'a'')$, $(bb'b'')$, $(cc'c'')$ sont des triangles équilatéraux, dont les côtés sont parallèles trois à trois et situés dans les trois faces d'un angle trièdre. Les centres des trois triangles sont d'ailleurs sur une même droite et l'on peut maintenant projeter de façon que, les trois triangles restant équilatéraux, la droite des centres soit perpendiculaire aux plans des trois triangles.

Or, la surface obtenue ayant trois sections perpendiculaires à une même droite, qui possèdent la symétrie ternaire par rapport à cette droite, possède elle-même cette symétrie, comme on s'en assure aisément.

THÉORÈME. — *Lorsqu'une surface cubique, sans point singulier, possède deux points I_3 , elle en possède un troisième en ligne droite avec les deux autres.*

Soient I_3, I'_3 les deux points supposés, a, b, c et a', b', c' les groupes de droites de la surface situées dans les plans tangents en ces points. Chacune des droites a, b, c rencontre l'une des droites a', b', c' ; supposons que a coupe a' , que b coupe b' et que c coupe c' et soient a'', b'' et c'' les troisièmes droites de la surface dans les plans (aa') , (bb') et (cc') . Elles doivent rencontrer I_3, I'_3 au même point, sinon la droite I_3, I'_3 aurait plus de trois points sur la surface et y serait tout entière. Mais alors les points I_3, I'_3 par chacun desquels passeraient trois droites de la surface non dans un même plan, seraient des points singuliers, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Soit I'_3 le point où a'', b'' et c'' coupent I_3, I'_3 .

Ces trois droites sont, de plus, dans un même plan, puisque le point I'_3 est supposé non singulier.

Une surface cubique peut posséder un quatrième point I_3 . Elle peut même en posséder six répartis sur deux droites ne se coupant pas. Pour le voir, il suffit de remarquer que si l'on fait $m = q = 0$ dans l'équation (2'), les trois sections réduites à trois droites sont formées de droites concourantes.

On peut aussi remarquer que, si l'on prend les deux droites contenant les points I_3 (et supposées à distance finie) pour arêtes $x = y = 0$ et $z = t = 0$ du tétraèdre de référence et quatre des points I_3 pour sommets de ce tétraèdre, l'équation de la surface peut prendre la forme

$$(4) \quad xy(y - mx) + s.zt(t - pz) = 0.$$

THÉORÈME. — *Une surface cubique possédant six points I_3 répartis sur deux droites k, l et tels que, pour chacun d'eux, les trois droites de la surface soient réelles, ne peut posséder un septième point I_3 satisfaisant à la même condition.*

Soient I_3, I'_3, I''_3 les points de k , J_3, J'_3, J''_3 ceux de l . Prenons I_3, I'_3, J_3 et J'_3 pour sommets $x=y=z=0, x=y=t=0, z=t=x=0$ et $z=t=y=0$ du tétraèdre de référence.

Si un septième point I_3 , que nous appellerons i_3 , existait, des trois droites d, d', d'' qui y convergeraient, chacune rencontrerait une droite de chacun des groupes concourant en I_3 , en I'_3 et en I''_3 .

Supposons que d coupe

$$I_3J_3, I'_3J'_3, I''_3J''_3,$$

que d' coupe

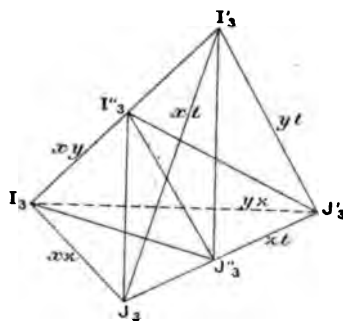
$$I_3J'_3, I'_3J''_3, I''_3J_3,$$

et que d'' coupe

$$I_3J''_3, I'_3J_3, I''_3J'_3,$$

d, d' et d'' sont sur les hyperboloïdes H, H' et H'' définis respectivement par les trois ternes de droites correspondantes (fig. 1).

Fig. 1.



Ces trois hyperboloïdes ont en commun les droites k et l , puisqu'ils contiennent chacun trois points de chacune de ces droites. Mais ils contiennent aussi le point i_3 et par suite la sécante à k et à l passant par i_3 , donc enfin un quadrilatère gauche, de sorte que ces trois quadriques font partie d'un même faisceau ayant pour base un quadrilatère gauche.

Les trois hyperboloïdes ont pour équations

$$(H) \quad pyz - mxt = 0,$$

$$(H') \quad -pyz + pmzx + yt = 0,$$

$$(H'') \quad mpx - mxt + yt = 0.$$

Or, la droite $y = \mu x$, $z = \frac{m}{p\mu} t$ du premier est sur le second si l'on a $\mu^2 - m\mu + m^2 = 0$ et sur le troisième à la même condition. Cette équation n'a pas de racines réelles en μ , par suite les deux côtés du quadrilatère autres que k et l sont imaginaires et le point i n'est pas un point réel.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 7 FÉVRIER 1900.

PRÉSIDENCE DE M. TOUCHE.

M. Touche fait la Communication suivante :

Les équations de l'Hydraulique données par Lagrange.

Lagrange a, vers la fin de sa vie, publié quelques pages sur la *Question du mouvement des fluides*, et M. Joseph Bertrand a reproduit ses Notes à ce sujet (*Mécanique analytique*, par Lagrange, 3^e édition, revue par M. Joseph Bertrand). La théorie de Lagrange ne diffère guère de celle d'Euler que par les notations, mais nous avons pensé qu'il serait de quelque intérêt de déduire de ses équations les équations transformées que nous avons tirées de celles d'Euler. Lagrange ne considère que les fluides incompressibles. Les considérations qu'il a présentées l'amènent au résultat

$$(A) \quad \begin{cases} \Delta \left(\frac{d^2 x}{dt^2} + X \right) - \frac{D\lambda}{Dx} = 0, \\ \Delta \left(\frac{d^2 y}{dt^2} + Y \right) - \frac{D\lambda}{Dy} = 0, \\ \Delta \left(\frac{d^2 z}{dt^2} + Z \right) - \frac{D\lambda}{Dz} = 0. \end{cases}$$

Rappelons, en quelques mots, la transformation que nous avons fait subir aux équations d'Euler. Nous avons considéré trois éléments égaux en longueur, ds suivant la courbe trajectoire, ds' suivant la normale principale à la trajectoire, ds'' suivant la binor-

male, puis $d\alpha$, l'angle de contingence de la trajectoire pour la longueur ds .

Or, les équations (A), de Lagrange, sont rapportées à trois axes rectangulaires; nous pouvons choisir ces axes, celui des x parallèle à ds et les x positifs étant comptés dans le même sens que la vitesse positive, celui des y parallèle à ds' ; alors celui des z est parallèle à ds'' . $\frac{D\lambda}{Dx}$ est ce que nous avons appelé $-\frac{dp}{ds}$; Δ est la densité de la masse que nous avons désignée par ρ ; X est la résultante des forces extérieures suivant l'axe des x et nous l'avons désignée par U . Donc la première des équations (A) peut, en conservant les notations que nous avons employées, être mise sous la forme

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds} = U - \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Pour voir ce que représente $\frac{d^2x}{dt^2}$, nous supposons d'abord le mouvement permanent. Avant de considérer dx , élément de trajectoire, comme coïncidant avec ds , nous pouvons le considérer, toujours dans le plan de ds et ds' , mais seulement voisin de ds , appeler α l'angle qu'il fait avec l'axe des y , et examiner ce que devient dx , lorsqu'on le rapproche indéfiniment de ds de manière à le faire coïncider avec lui. On a

$$\begin{aligned} dx &= ds \sin \alpha, \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{ds}{dt} \sin \alpha; \end{aligned}$$

différentions, par rapport à t ,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2s}{dt^2} \sin \alpha + \cos \alpha \frac{d\alpha}{dt} \frac{ds}{dt};$$

à la limite, lorsque dx se confond avec ds , on obtient

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2s}{dt^2}.$$

Or, on a

$$\frac{ds}{dt} = v_1,$$

d'où, en différentiant par rapport à s ,

$$\begin{aligned}\frac{d^2 s}{ds dt} &= \frac{dv_1}{ds}, \\ \frac{d^2 s}{dt^2} &= \frac{ds}{dt} \frac{dv_1}{ds}, \\ \frac{d^2 s}{dt^2} &= v_1 \frac{dv_1}{ds}\end{aligned}$$

et, comme nous venons de voir que $\frac{d^2 s}{dt^2}$ tend vers $\frac{d^2 x}{dt^2}$,

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = v_1 \frac{dv_1}{ds};$$

la première des équations (A) revient donc à

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds} = U - v_1 \frac{dv_1}{ds};$$

nous retrouvons la première de nos équations générales du mouvement des fluides transformées, dans le cas du mouvement permanent.

Nous avons de même

$$\begin{aligned}dy &= \cot \alpha \, dx, \\ \frac{dy}{dt} &= \cot \alpha \frac{dx}{dt}, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= -\frac{1}{\sin^2 \alpha} \frac{d\alpha}{dt} \frac{dx}{dt} + \cot \alpha \frac{d^2 x}{dt^2};\end{aligned}$$

si l'élément dx se rapproche indéfiniment de ds , il vient à la limite,

$$\begin{aligned}\frac{d^2 y}{dt^2} &= -\frac{d\alpha}{dt} \frac{ds}{dt}, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= -v_1 \frac{d\alpha}{dt}, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= -v_1 \frac{ds}{dt} \frac{d\alpha}{ds}, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= -v_1^2 \frac{d\alpha}{ds};\end{aligned}$$

la seconde des équations (A) revient donc à

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds} = U' + v_1^2 \frac{d\alpha}{ds}.$$

Pour la troisième des équations (A) $\frac{d^2 z}{dt^2}$ est nul, car les différentielles des vitesses doivent être, comme les vitesses elles-mêmes, dirigées dans le plan osculateur, si l'on ne considère que le mouvement permanent, et alors elles donnent, suivant la binormale, des projections qui sont des infiniment petits du second ordre.

Nous retrouvons donc notre équation transformée

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds''} = U''.$$

Nous avons aussi transformé l'équation de continuité d'Euler et nous sommes arrivés à une équation qui, réduite au cas d'un fluide incompressible, est

$$\frac{\frac{dv_1}{v_1}}{ds} - \frac{\delta x}{ds'} - \frac{\delta' x}{ds''} = 0,$$

dans laquelle δx est l'angle de contingence suivant ds' et $\delta' x$ l'angle de contingence suivant ds'' .

Cette équation est aussi donnée par Lagrange comme complément des équations (A); il la donne sous la forme

$$(B) \quad \frac{D dx}{Dx} + \frac{D dy}{Dy} + \frac{D dz}{Dz} = 0.$$

Si nous continuons à considérer les axes suivant ds, ds', ds'' , nous ferons remarquer que, d'après les notations de Lagrange, $\frac{D dx}{Dx}$ est la variation de la surface de la section de la petite masse D_m , qui correspond à la variation de la vitesse v_1 suivant l'axe des x et que, par suite, ce terme représente $\frac{1}{ds} \frac{dv_1}{v_1}$; de même $\frac{D dy}{Dy}$ est la variation de la même surface qui correspond à l'angle de contingence $-\frac{\delta x}{ds'}$ suivant ds' et $\frac{D dz}{Dz}$ est la variation de cette surface qui correspond à l'angle de contingence $-\frac{\delta' x}{ds''}$ suivant ds'' . Comme la surface de cette section est assujettie à être constante, il faut évaluer à zéro la somme des trois termes, ce qui donne l'équation (B) de Lagrange, laquelle n'est autre que notre équation de continuité transformée.

SÉANCE DU 21 FÉVRIER 1900.

PRÉSIDENCE DE M. POINCARÉ.

Élections :

MM. Servant, présenté par MM. Kœnigs et Borel, Perchot, présenté par MM. Kœnigs et Borel, Adhémar (vicomte Robert d'), présenté par MM. Picard et d'Ocagne, Sparre (comte Magnus de), présenté par MM. L. Lévy et Borel, Vuibert, présenté par MM. Bioche et Borel, Hoffbauer, présenté par MM. Fontené et Bricard, Saltykow, présenté par MM. Blutel et Borel, sont élus, à l'unanimité, membres de la Société.

Communications :

M. Torrès présente à la Société un appareil servant à la résolution de l'équation du second degré à coefficients imaginaires et indique comment on construirait des appareils pour la résolution des équations algébriques.

M. TOUCHE fait la Communication suivante :

Observations sur les équations de l'Hydraulique d'après Lagrange.

Les équations générales du mouvement des fluides transformées, c'est-à-dire rapportées aux trois axes rectangulaires suivant ds , ds' , ds'' , sont les mêmes que nous les déduisons des équations d'Euler, ou que nous le fassions de celles de Lagrange, à la condition de nous borner au cas de la densité constante et du mouvement permanent. Mais, comme nous les avons dans ce cas, il est facile de les étendre au cas du mouvement non permanent, en s'appuyant sur le théorème de d'Alembert. En effet, dans le cas du mouvement permanent, nous avons obtenu, pour la première des équations du mouvement des fluides transformées,

$$(1) \quad \frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds} = U - v_1 \frac{dv_1}{ds},$$

et cette équation est celle que donne le théorème de d'Alembert pour le mouvement permanent. En effet, p étant la pression, dp doit être la différentielle de $\frac{1}{2} v_1^2$ ou $v_1 dv_1$; alors dv_1 est la différentielle de v_1 correspondante à ds , espace parcouru dans le

temps dt ; si, au contraire, le mouvement n'est pas permanent, en même temps que la différentielle dv_1 correspondante à l'augmentation de vitesse pour l'espace ds parcouru dans le temps dt , il faut considérer une différentielle $d'v_1$ de v_1 , qui a lieu pendant le même temps dt et qui est due à l'augmentation de vitesse, au point A, origine de ds ; la différentielle de $\frac{1}{2}v_1^2$ est alors

$$v_1 dv_1 + v_1 d'v_1$$

et il nous vient alors

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds} = U - v_1 \frac{dv_1}{ds} = v_1 \frac{d'v_1}{ds},$$

ou bien

$$(1) \quad \frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds} = U - v_1 \frac{dv_1}{ds} - \frac{d'v_1}{dt}.$$

Nous retrouvons ainsi la première équation que nous avons obtenue en transformant les équations d'Euler; seulement nous mettons en évidence la signification des dérivées $\frac{dv_1}{ds}$ et $\frac{d'v_1}{dt}$; sous cette nouvelle forme, on voit bien que $d'v_1$ peut avoir toutes les valeurs possibles pour une valeur déterminée de dv_1 .

Nous pouvons développer le terme $\frac{d'v_1}{dt}$ suivant la série de Mac-laurin et en appelant $f(0)$ la valeur initiale de $\frac{d'v_1}{dt}$, $f'(0)$ la valeur initiale de $\frac{d^2v_1}{dt^2}$, $f''(0)$ celle de $\frac{d^3v_1}{dt^3}$, ..., on aura, à un instant quelconque,

$$\frac{d'v_1}{dt} = f(0) + t f'(0) + \frac{t^2}{1.2} f''(0) + \dots$$

et dans chaque cas particulier de mouvement non permanent, il faudra tenir compte des dérivées de divers ordres de $\frac{d'v_1}{dt}$ qui ne sont pas nulles.

Nous pourrions obtenir de la même manière la deuxième des équations générales du mouvement des fluides transformées; nous retrouverions l'équation tirée des équations d'Euler

$$(2) \quad \frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds} = U' + v_1 \frac{dx_1}{dt} + v_1^2 \frac{dx}{ds},$$

nous remarquerons que les différentielles dx et dx_1 sont suffisam-

ment indiquées séparément et, par suite, qu'il n'y a aucune nécessité de modifier l'équation (2). Nous observerons seulement que $\frac{d\alpha_1}{dt}$ peut être développé suivant la série de Maclaurin, comme nous l'avons fait pour $\frac{d^2v_1}{dt}$ dans l'équation (1).

L'équation

$$(3) \quad \frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds} = U^2 + v_1 \frac{dz_1}{dt}$$

reste la même.

Dans l'équation de continuité transformée

$$\frac{1}{v_1} \frac{dv_1}{ds} - \frac{\partial z}{\partial s'} - \frac{\delta' \alpha}{\delta s'} = 0,$$

si l'on passe du mouvement permanent au mouvement non permanent, $\frac{dv_1}{ds}$ doit être changé, d'après ce que nous vu, en $\frac{dv_1}{ds} + \frac{d^2v_1}{ds^2}$, par suite en $\frac{dv_1}{ds} + \frac{1}{v_1} \frac{d^2v_1}{dt}$ et $\frac{1}{v_1} \frac{dv_1}{ds}$ doit l'être en $\frac{1}{v_1} \frac{dv_1}{ds} + \frac{1}{v_1^2} \frac{d^2v_1}{dt}$; de même $\frac{\partial z}{\partial s'}$ doit être changé en $\frac{\partial z}{\partial s'} + \frac{d}{dt} \frac{\partial z}{\partial s'}$ et $\frac{\delta' \alpha}{\delta s'}$ en $\frac{\delta' \alpha}{\delta s'} + \frac{d}{dt} \frac{\delta' \alpha}{\delta s'}$. Les termes $\frac{1}{v_1^2} \frac{d^2v_1}{dt}$, $\frac{d}{dt} \frac{\partial z}{\partial s'}$ et $\frac{d}{dt} \frac{\delta' \alpha}{\delta s'}$ peuvent être développés suivant la série de Maclaurin.

Le but que nous nous proposons, c'est d'établir les équations d'une courbe trajectoire, ce qui résoudra le problème. Dans le cas où la trajectoire n'est pas une courbe fixe, nous considérerons la vitesse en un point A; nous prendrons dans la direction de cette vitesse une longueur AB égale à ds ; ensuite, dans la direction de la vitesse au point B et au même instant, une nouvelle longueur égale à ds et, en continuant ainsi de suite, nous obtiendrons ce que nous appellerons une *trajectoire instantanée*. Nous établirons d'abord les équations d'une courbe trajectoire, pour le cas des fluides incompressibles et du mouvement permanent. Nous étendrons ensuite ces équations au cas du mouvement non permanent et des fluides compressibles, en suivant la méthode employée pour le calcul des mouvements des corps célestes, c'est-à-dire en dirigeant le calcul de manière à considérer des termes qui peuvent être négligés, en conservant une approximation suffisante.

SÉANCE DU 7 MARS 1900.

PRÉSIDENCE DE M. MAURICE D'OCAGNE.

Communications :

M. André : *Sur la comptabilité des systèmes de jeux en escrime.*

MM. Borel et Landau présentent quelques observations à propos de la Communication de M. André.

M. FERBER fait la Communication suivante :

Application du symbole des déterminants positifs.

Comme application de la théorie des déterminants positifs qui a paru dans le Tome XXVII du *Bulletin*, nous donnerons aujourd'hui deux formules. La première donne la somme des puissances $p^{\text{ièmes}}$ des $n - 1$ premiers nombres au moyen de la résolution en nombres entiers positifs de l'équation

$$(1) \quad s_1 + s_2 + s_3 \dots = p.$$

Soit $s_1, s_2, \dots, s_\sigma$ une solution ⁽¹⁾ de cette équation, nous formons le déterminant positif

$$\left\| \begin{array}{cccc} \frac{1}{s_1!} & \frac{1}{s_2!} & \dots & \frac{1}{s_\sigma!} \\ \frac{1}{s_1!} & \frac{1}{s_2!} & \dots & \frac{1}{s_\sigma!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{s_1!} & \frac{1}{s_2!} & \dots & \frac{1}{s_\sigma!} \end{array} \right\|$$

que nous convenons de développer seulement par lignes et qu'on peut écrire plus simplement ⁽²⁾

$$\left\| \frac{1}{s_1!} \quad \frac{1}{s_2!} \quad \dots \quad \frac{1}{s_\sigma!} \right\|,$$

⁽¹⁾ σ est toujours $< p$ naturellement.

⁽²⁾ Voir le *Bulletin*, Tome XXVII, page 285. Rappelons que toutes les fois que a colonnes sont égales, la factorielle $\frac{1}{a!}$ est sous-entendue, de sorte que, par exemple,

$$\left\| \frac{1}{1!} \quad \frac{1}{1!} \right\| = 1, \quad \left\| \frac{1}{2!} \quad \frac{1}{2!} \right\| = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \left\| \frac{1}{2!} \quad \frac{1}{1!} \quad \frac{1}{1!} \right\| = \frac{3}{2}.$$

nous le multiplions par la factorielle $\frac{p! n(n-1)\dots(n-\sigma)}{\sigma+1!}$ qu'on peut écrire plus simplement ⁽¹⁾ $\frac{p! n^{\sigma+1}-1}{\sigma+1!}$ et nous ajoutons autant de termes semblables qu'il y a de solutions dans l'équation (1) pour trouver la somme cherchée ⁽²⁾.

Par exemple la somme des carrés est

$$2! \frac{n(n-1)}{1} \left\| \frac{1}{2!} \right\| + 2! \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \left\| \frac{1}{2!} \frac{1}{1!} \right\|,$$

la somme des cubes

$$3! \frac{n^{3+1}-1}{2!} \left\| \frac{1}{3!} \right\| + 3! \frac{n^{3+1}-1}{3!} \left\| \frac{1}{2!} \frac{1}{1!} \right\| + 3! \frac{n^{3+1}-1}{4!} \left\| \frac{1}{1!} \frac{1}{1!} \frac{1}{1!} \right\|,$$

la somme des quatrièmes puissances

$$4! \frac{n^{4+1}-1}{2!} \left\| \frac{1}{4!} \right\| + 4! \frac{n^{4+1}-1}{3!} \left\| \frac{1}{3!} \frac{1}{1!} \right\| + 4! \frac{n^{4+1}-1}{3!} \left\| \frac{1}{2!} \frac{1}{2!} \right\| \\ + 4! \frac{n^{4+1}-1}{4!} \left\| \frac{1}{2!} \frac{1}{1!} \frac{1}{1!} \right\| + 4! \frac{n^{4+1}-1}{5!} \left\| \frac{1}{1!} \frac{1}{1!} \frac{1}{1!} \frac{1}{1!} \right\|.$$

Cette formule se trouve en sommant $\frac{\Delta x}{\Delta t} = \varphi t$ directement et par itération. En effet l'itération, qui est l'opération $f[f(\dots f(x))]$ ou $f_x^{(n)}$, peut donner des intégrations aux différences finies. En voici un autre cas. Faisons $fx = x + \tau \varphi x$, itérer fx c'est alors chercher successivement

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + \tau \varphi x_0, \\ x_2 &= x_1 + \tau \varphi x_1, \\ &\dots\dots\dots, \\ x_n &= x_{n-1} + \tau \varphi(x_{n-1}), \end{aligned}$$

c'est-à-dire intégrer $\frac{\Delta x}{\Delta t} = \varphi(x)$ pour $\Delta t = \tau$ et à partir de $t = 0$ jusqu'à $t = n\tau$.

⁽¹⁾ En employant la notation de Van der Monde.

⁽²⁾ En fait, pour le calcul, les déterminants se développent très simplement et se réduisent à des monomes; mais, en les laissant sous leur forme primitive, ils facilitent l'exposition de la formule suivante.

Voici la formule qui donne x_n

$$\begin{aligned} x_n = & x_0 + n\tau\varphi(x_0) + \frac{n^{3|-1}}{2!} \tau^2\varphi x_0 D\varphi x_0 \\ & + \tau^3 \left[\frac{n^{3|-1}}{2!} \left\| \varphi^2 \frac{D^2}{2} \right\| \varphi + \frac{n^{3|-1}}{3!} \left\| \varphi D \varphi D \right\| \varphi \right] \\ & + \tau^4 \left[\frac{n^{3|-1}}{2!} \left\| \varphi^3 \frac{D^3}{3!} \right\| \varphi + \frac{n^{3|-1}}{3!} \left\| \varphi^2 \frac{D^2}{2!} \varphi D \right\| \varphi \right. \\ & \left. + \frac{n^{3|-1}}{4!} \left\| \varphi D \varphi D \varphi D \right\| \varphi \right] + \dots \end{aligned}$$

Les déterminants positifs ⁽¹⁾ formant le coefficient de τ^{p+1} contiennent des exposants qui sont encore des solutions de l'équation (1), les factorielles en n sont les mêmes que précédemment; les deux problèmes sont analogues.

Cette formule contient naturellement le développement de Taylor; en effet, passons aux différences infiniment petites en faisant $n\tau = \text{const.} = t$, puis $\tau = 0$, $n = \infty$, il reste

$$x = x_0 + t\varphi x_0 + \frac{t^2}{2!} \varphi D x + \frac{t^3}{3!} \varphi D \varphi D \varphi + \dots,$$

ce qui est bien le développement en série par la formule de Taylor de la solution de $dx = \varphi x \times dt$.

Pour obtenir x_n il suffirait évidemment de chercher $\frac{d^p f^{(n)}}{d\tau^p}$, mais le calcul devenant rapidement inextricable nous avons cherché directement x_n en appliquant le procédé indiqué dans les *Nouvelles Annales* de novembre 1898.

SÉANCE DU 21 MARS 1900.

PRÉSIDENCE DE M. ANDRÉ.

Communications :

M. André : *De l'organisation des assauts complets.*

M. d'Ocagne : *Sur un problème d'analyse combinatoire.*

(¹) Ces déterminants, qui sont à développer par lignes, sont symboliques et donnent naissance à des termes de la forme $\varphi^3 \frac{D^3}{3!} \varphi^2 \frac{D^2}{2!} \varphi$ qui indiquent l'opération $\varphi^3 \times \frac{D^3}{3!} \left[\varphi^2 \times \frac{D^2}{2!} (\varphi) \right]$. L'opération faite, on remplace, dans les φ , x par x_0 . Voir le *Bulletin*, Tome XXVII, page 288.

M. A. TRESSE fait la Communication suivante :

Sur les propriétés projectives des coniques.

M. Leau a récemment démontré ⁽¹⁾, *par une voie élémentaire, que la perspective d'une conique est une conique*; sa méthode suppose connus les théorèmes de Dandelin, qui permettent d'étendre aux coniques les propriétés des pôles et polaires, établies pour la circonférence.

La brève esquisse qui suit a pour but de montrer que, dans les éléments, on peut arriver simplement au même résultat, dès que sont établies les propriétés fondamentales des tangentes et particulièrement la suivante : *La portion d'une tangente mobile à une conique, comprise entre deux tangentes fixes, est vue d'un foyer sous un angle constant.*

Sans présenter la valeur scientifique des articles ordinaires du *Bulletin*, les lignes qui suivent intéresseront peut-être ses lecteurs, et, parmi eux, les professeurs.

PROBLÈME. — *Construire une conique dont on connaît les positions Ox , Oy des deux axes, un point M et la tangente en ce point.*

Soient T , T' les intersections de la tangente avec Ox et Oy , N et N' celles de la normale en M avec les mêmes axes.

Si F , F' sont les foyers, situés sur Ox , d'une conique cherchée, les bissectrices de l'angle en M du triangle MFF' sont MT , MN et rencontrent Oy , perpendiculaire sur le milieu de FF' , en des points T' et N' situés sur le cercle circonscrit à MFF' ; F , F' sont donc donnés par l'intersection de Ox avec le cercle circonscrit au triangle $MT'N'$.

On peut répéter la même construction sur Oy ; mais le point O étant dans un seul des angles formés par MT et MN est intérieur à une seule des deux circonférences MTN , $MT'N'$, la construction réussit dans un seul cas.

Une conique étant définie par deux foyers et une tangente, le problème admet, les cas évanouissants laissés de côté, une solution et une seule.

⁽¹⁾ *Bulletin de la Société Philomathique de Paris*, 9^e série, t. I, n° 2, p. 87.

LEMME. — *Si un segment PQ d'une droite Δ est vu d'un point fixe F sous un angle constant, il existe deux points fixes A et B sur la droite, tels que $AP \cdot BQ$ soit constant.*

Car soient A et B les positions respectives de P et de Q quand FQ et FP se placent sur Fx parallèle à Δ , c'est-à-dire soient $(\overline{FP}, \overline{FQ}) = (\overline{FA}, \Delta) = (\Delta, \overline{FB})$; FA et FB sont symétriques par rapport à Fx et à sa perpendiculaire Fy; soit FQ' la symétrique de FQ.

On a

$$(\overline{FP}, \Delta) = (\overline{FQ}, \overline{FB}) = (\overline{FA}, \overline{FQ'})$$

ou

$$(\overline{PF}, \overline{PQ'}) = (\overline{FA}, \overline{FQ'}),$$

et, par suite, la circonférence passant par P, F, Q' est tangente à FA, de sorte que

$$AP \cdot AQ' = \overline{AF}^2$$

ou

$$AP \cdot BQ = -\overline{AF}^2.$$

C. Q. F. D.

On en déduit immédiatement :

THÉORÈME I. — *Les segments AP, BQ interceptés, à partir des points de contact A, B, sur deux tangentes parallèles fixes AT, BT' d'une conique à centre, par une tangente mobile PQ, ont un produit constant.*

Car, si l'on mène, par un foyer F, la parallèle Fx aux tangentes, on sait que

$$(\overline{FP}, \overline{FQ}) = (\overline{FA}, \overline{Fx}) = (\overline{Fx}, \overline{FB}).$$

Si FB, FQ rencontrent AT en B₁ et Q₁, on a donc

$$AP \cdot B_1 Q_1 = \text{const.}$$

d'où

$$AP \cdot BQ = \text{const.}$$

COROLLAIRE. — *Les segments AP, AP' interceptés, à partir du point de contact A, sur une tangente fixe d'une conique à centre, par deux tangentes parallèles variables, ont un produit constant.*

Car, avec les notations précédentes, $AP' = -BQ$.

RÉCIPROQUE DU THÉORÈME I. — *Si une droite mobile PQ intercepte, sur deux parallèles fixes AT, BT' à partir des origines fixes A et B, deux segments AP, BQ dont le produit soit constant, elle enveloppe une conique; et cette conique est tangente en A et B aux droites AT, BT'.*

Soit

$$(1) \quad AP \cdot BQ = k,$$

et soit O le milieu de AB.

Construisons d'abord sur AT deux points R, R', tels que OR, OR' soient rectangulaires et que

$$AR \cdot AR' = -k.$$

Pour cela, si $k < 0$, on prend sur AT

$$AC = -AC' = \sqrt{-k},$$

et il suffit de prendre pour OR, OR' les bissectrices de l'angle COC'.

Si $k > 0$, on prend sur la perpendiculaire en A à AT

$$AD = -AD' = \sqrt{k},$$

et il suffit de prendre pour R et R' les intersections de AT avec la circonférence circonscrite à ODD'.

Cela fait, considérons la conique Γ dont les axes sont placés sur OR, OR' et qui est tangente en A à AT (problème).

R et R' sont les intersections, avec AT, de deux tangentes de cette conique, lesquelles sont parallèles, comme symétriques de AT, par rapport aux axes; et comme

$$AR \cdot AR' = -k,$$

toutes les tangentes à Γ (théorème I et son corollaire) sont des droites mobiles PQ.

Enfin, comme par un point quelconque P de AT on ne peut mener, d'une part, qu'une tangente à Γ distincte de AT; d'autre part, qu'une droite mobile PQ, toute droite PQ est bien tangente à Γ .

C. Q. F. D.

Remarque. — Du théorème I et sa réciproque résulte, en presque toute généralité, et très simplement, que la perspective d'une conique est une conique. Il suffit que l'on puisse mener à la conique deux tangentes parallèles à la ligne de fuite.

Pour ne laisser échapper aucun cas, il n'y a qu'à généraliser ce qui précède.

THÉORÈME II. — Soient SA, SB deux droites fixes tangentes en A et B à une conique; P, Q leurs points d'intersection avec une tangente mobile de la conique; le produit

$$\frac{AP}{SP} \cdot \frac{BQ}{SQ}$$

est constant.

En effet, soient F un foyer de la conique, A0, B0' les parallèles à FS menées par A et B, P' et Q' leurs intersections respectives avec FP, FQ; on sait que

$$(FP, FQ) = (FA, FS) = (FS, FB).$$

Donc, comme dans le théorème I,

$$AP' \cdot BQ' = \text{const.}$$

Or,

$$AP' = SF \cdot \frac{AP}{SP} \quad \text{et} \quad BQ' = SF \cdot \frac{BQ}{SQ}.$$

Donc

$$(2) \quad \frac{AP}{SP} \cdot \frac{BQ}{SQ} = \text{const.} \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Remarque. — Si la conique est une parabole, dans une position particulière de l'angle (FP, FQ), FP et FQ sont respectivement parallèles à SA et SB, auquel cas on a

$$AP' = SF, \quad BQ' = SF.$$

La valeur constante du produit est donc l'unité.

COROLLAIRE. — Si une conique à centre est inscrite dans un parallélogramme $S\alpha T\beta$, la droite qui joint les contacts A, B de deux côtés $S\alpha$, $S\beta$ issus d'un même sommet S, est parallèle à la diagonale $\alpha\beta$ qui ne passe pas par ce sommet.

Car, en amenant la tangente mobile dans les deux positions αT , βT , on trouve, en appliquant le théorème,

$$\frac{A\alpha}{S\alpha} = \frac{B\beta}{S\beta},$$

ce qui exprime que AB et $\alpha\beta$ sont parallèles.

RÉCIPROQUE DU THÉORÈME II. — *Si une droite mobile PQ rencontre les côtés SA , SB d'un triangle SAB en des points P , Q , tels que le produit*

$$\frac{AP}{SP} \cdot \frac{BQ}{SQ}$$

soit constant, elle enveloppe une conique; et cette conique est tangente en A et B aux droites SA et SB .

Soit k la valeur constante du produit; si $k \neq 1$, prenons sur SA , SB , les points α et β , tels que

$$(3) \quad k = \frac{A\alpha}{S\alpha} = \frac{B\beta}{S\beta},$$

et construisons le parallélogramme $S\alpha T\beta$. Il existe (réciproque du théorème I) une conique Γ ayant son centre au centre du parallélogramme, tangente à SA en A , et à sa parallèle βT et enfin tangente à une troisième droite $S\beta$. Cette conique est manifestement inscrite dans le parallélogramme; et elle touche $S\beta$ en B , AB étant, d'après (3), parallèle à la diagonale $\alpha\beta$.

La droite αT étant une tangente particulière de Γ , parallèle à SB , avec la condition (3), toutes les tangentes à Γ sont, d'après le théorème II, des droites mobiles PQ ; et, comme plus haut (réciproque du théorème I), toute droite PQ est tangente à Γ .

C. Q. F. D.

Si $k = 1$, on prendra pour conique Γ la parabole tangente en A et B à SA et SB . Toute tangente à Γ est encore une droite PQ et réciproquement.

C. Q. F. D.

THÉORÈME III. — *La perspective d'une conique est une autre conique.*

Conservons, en effet, les notations du théorème II, et dési-

gnons la perspective d'un point P par la lettre accentuée P'; la droite SA et sa perspective S'A' se coupent en un point α ; si ω est le point de vue, le faisceau de quatre droites ωS , ωA , ωP , $\omega \alpha$, coupé par les transversales SA, S'A', donne

$$\frac{AP}{SP} \cdot \frac{S\alpha}{A\alpha} = \frac{A'P'}{S'P'} \cdot \frac{S'\alpha}{A'\alpha}$$

ou

$$\frac{A'P'}{S'P'} = \frac{AP}{SP} \times \text{const.}$$

De même pour SB. Si donc on considère la conique Γ comme l'enveloppe de ses tangentes PQ, la relation (2) (théorème II) donne

$$\frac{A'P'}{S'P'} \cdot \frac{B'Q'}{S'Q'} = \text{const.},$$

c'est-à-dire (réciproque II) que les projections des tangentes à Γ enveloppent une conique Γ' . C. Q. F. D.

CONCLUSION. — Dans tout ce qui précède, une conique est considérée comme l'enveloppe de ses tangentes, chacune de ses tangentes étant définie par les deux segments AP, BQ qu'elle intercepte sur deux tangentes fixes AT, BT' à partir de leurs points de contact A, B.

On peut, de même, se placer au point de vue ponctuel, et, considérant toujours deux points fixes A, B de la conique et leurs tangentes AT, BT', définir un point quelconque M de la conique par les segments AP₁, BQ₁, qu'interceptent respectivement sur AT et BT' les droites BM et AM. La position de M, point de contact d'une tangente, étant définie par le corollaire du théorème II, on retrouve, pour P₁ et Q₁, les relations (1) et (2), et l'on peut répéter, presque mot à mot, tout ce qui a été dit.

On arrive ainsi, sans s'écarter d'un ordre d'idées très élémentaires, aux propriétés des faisceaux et divisions homographiques, propriétés qui ont constamment inspiré ces lignes, ce qui n'aura pas échappé au lecteur.

EXTRAIT DES STATUTS ET DU RÈGLEMENT.

La Société mathématique de France a pour objet l'avancement et la propagation des études de Mathématiques pures et appliquées. Elle y concourt par ses travaux et ses publications. Elle a son siège à Paris.

La Société se compose de sociétaires perpétuels, de membres résidents et de membres non résidents, en nombre illimité.

Sont considérés comme résidents les membres qui ont à Paris leur domicile ou leurs occupations professionnelles.

Les Étrangers peuvent faire partie de la Société.

Les conditions à remplir, pour être membre de la Société, sont les suivantes : 1^{re} avoir été présenté par deux de ses membres et agréé par le Conseil d'administration ou par le Bureau agissant en vertu d'un mandat du Conseil; 2^e avoir obtenu, à l'une des séances qui ont suivi la présentation, les suffrages de la majorité des membres présents; 3^e avoir versé un droit d'admission de *vingt francs*; 4^e payer une cotisation annuelle dont le montant est de *vingt francs* pour les membres résidents, et de *quinze francs* pour les membres non résidents.

La cotisation annuelle peut toujours être rachetée par une somme de *trois cents francs*, versée dans les conditions fixées par le règlement administratif de la Société.

Ce versement confère le titre de *sociétaire perpétuel*.

La cotisation annuelle est payée au commencement de chaque exercice dont l'origine est fixée au 1^{er} novembre de chaque année.

Les nouveaux membres doivent payer la totalité de la cotisation de l'exercice en cours, quelle que soit l'époque de leur admission.

La Société tient des séances ordinaires deux fois par mois; elle prend trois mois de vacances, en août, septembre et octobre.

Pour assister aux séances, les personnes étrangères à la Société doivent être présentées par l'un de ses membres.

La Société publie par livraisons un Recueil annuel qui a pour titre : *Bulletin de la Société mathématique de France*, et qui contient, avec un extrait des procès-verbaux des séances, des Notes et Mémoires sur les Mathématiques pures ou appliquées, ayant pour auteurs des membres de la Société, et présentant quelque originalité au point de vue de la méthode ou des résultats.

Les livraisons du *Bulletin* sont adressées à tous les membres de la Société, au fur et à mesure de leur publication. Toutefois, dans le cas où un sociétaire se met en retard dans le paiement de sa cotisation, l'envoi du *Bulletin* est suspendu pour lui, jusqu'à ce qu'il ait acquitté l'arriéré.

La Société entretient une Bibliothèque, qui est alimentée par les dons particuliers, les achats autorisés par son conseil d'administration, et l'échange de ses publications avec les journaux et recueils consacrés aux Mathématiques pures et appliquées, paraissant en France et à l'Étranger.

TABLE DES MATIÈRES

(FASCICULE 2.)

Mémoires et Communications.

	Page
H 9 a. — Sur l'intégrale résiduelle; par M. Hadamard	69
A 4 d. — Sur certaines équations des quatrième et cinquième degrés; par M. Léon Autonne.....	90
H 8. — Sur les changements de variable; par M. Jules Bondon.....	107
M 3 h. — Sur les surfaces cubiques ayant un axe de symétrie ternaire et sur les surfaces cubiques possédant des points à indicatrice du troisième ordre; par M. Dumont.....	117

Comptes rendus des Séances.

S 2. — Les équations de l'hydraulique données par Lagrange; par M. Touche.....	121 et 122
B 1 a. — Applications du symbole des déterminants positifs; par M. Ferber.....	128
L 1 a. — Sur les propriétés projectives des coniques; par M. A. Treair.....	131

MODIFICATIONS A LA LISTE DES MEMBRES DE LA SOCIÉTÉ

Date de l'adhésion.	NOM.
1900.	ESTIENNE, capitaine au 19 ^e régiment d'artillerie, à Nice.
1879.	ESLØST (Elling), professeur à l'École Polytechnique, à Høvik, près Christiania (Norvège).
1900.	RENAUD (Pierre), 7, rue de la Tour, à Paris.

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS.

- BOREL (Émile)**, Maître de Conférences à l'École Normale supérieure. — **Leçons sur la Théorie des Fonctions**. Exposé des éléments de la théorie des ensembles avec des applications à la théorie des fonctions. Grand in-8; 1898..... 3 fr. 50 s.
- BOREL (Émile)**, Maître de Conférences à l'École Normale supérieure. — **Leçons sur les fonctions entières** (Nouvelles Leçons sur la Théorie des fonctions). Un volume grand in-8 de vi-135 pages, 1900. 3 fr. 50 s.

28162. Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 25.

Le Gérant: GAUTHIER-VILLARS.

Publication trimestrielle.

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE

PARIS.

PAR LES SECRÉTAIRES.

Adresse pour la rédaction, à M. BANA, boulevard Saint-Germain, 107;
pour la distribution, à M. BIAVEY, rue Claude-Bernard, 65.

TOME XXVIII. — FASCICULE III.

PARIS,
AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ.

7, RUE DES GRANDS-AUGUSTINS, 7.

MM. les Membres de la Société sont priés d'adresser leur collation à M. *Claude-Lafontaine*,
Coudan, rue de Trévise, n° 31, à Paris, Trésorier de la Société.

On s'abonne et on trouve les Volumes déjà publiés au siège de la Société et à la Librairie
Gauthier-Villars, 55, quai des Grands-Augustins, Paris.

Les séances de la Société mathématique ont lieu les premier et troisième mercredis de chaque mois à 8 heures et demie.

Depuis le 1^{er} Mars 1900 les séances de la Société ont lieu dans une salle de la Faculté des Sciences (entrée place de la Sorbonne, escalier tout au bout de la galerie, deuxième étage à droite). La Bibliothèque devant être réinstallée, s'adresser provisoirement, pour ce qui la concerne, au concierge de la Faculté des Sciences.

AVIS.

Dans sa séance du 2 février 1883, le Conseil de la Société mathématique de France a décidé qu'à l'avenir tout Membre de la Société qui voudra compléter sa collection du *Bulletin* aura le droit personnel de le faire, une seule fois pour chacun des volumes publiés avant son admission, aux prix suivants :

	Le volume.
Un volume au moins.....	0
De cinq à neuf volumes.....	4,50
Moins de cinq volumes.....	5,00
	6,00

Dans sa séance du 18 février 1900, le Conseil de la Société mathématique de France a décidé qu'à l'avenir tout Membre de la Société, auteur d'un travail quelconque inséré dans le *Bulletin* et désirant en obtenir des tirages à part, devra en faire la demande en retournant l'épreuve corrigée.

Si le nombre demandé ne dépasse pas cinquante, les frais du tirage à part seront faits par la Société.

Conformément à des décisions prises par le Conseil et par la Commission d'impression :

1^o Le *Bulletin*, depuis le Tome XXVII, paraît tous les trois mois.

2^o Les auteurs de tous travaux destinés au *Bulletin* sont instamment priés d'insérer en tête de leurs manuscrits la classification que leur assigne, d'après le sujet traité, l'*Index du Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques*.

3^o Ils sont également invités à ne pas dépasser, autant que possible, la proportion de une figure pour quatre pages de texte imprimé.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

SUR UN EXEMPLE D'APPROXIMATIONS SUCCESSIVES DIVERGENTES;

Par M. ÉMILE PICARD.

J'ai signalé autrefois un exemple curieux d'approximations successives divergentes fourni par l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F(u, x, y).$$

où $F(u, x, y)$ est une fonction positive et croissante de u , quand (x, y) est dans une certaine région du plan. Étant tracée dans cette région une courbe fermée C , il existe une intégrale continue et une seule satisfaisant à l'équation précédente et s'annulant sur C . Si l'on cherche à obtenir cette intégrale, en procédant par approximations successives et formant les équations

$$\begin{aligned}\Delta u_1 &= F(0, x, y), \\ \Delta u_2 &= F(u_1, x, y), \\ &\dots\dots\dots, \\ \Delta u_n &= F(u_{n-1}, x, y),\end{aligned}$$

tous les u s'annulant sur C , on reconnaît que les u à indices impairs forment une suite croissante tendant vers une limite, et que les u à indices pairs forment une suite décroissante tendant vers une autre limite qui peut être différente de la première. Si l'on admet que u_{2n+1} et u_{2n} convergent **UNIFORMÉMENT** vers leurs limites u et v , il est presque immédiat que l'on a

$$\Delta u = F(v, x, y), \quad \Delta v = F(u, x, y).$$

Est-il possible d'établir que les u d'indices impairs, et les u d'indices pairs convergent *uniformément* vers leurs limites? J'ai examiné sommairement ce point, pour le cas analogue au précédent d'une équation à une seule variable, dans une Note des *Comptes rendus* (14 février 1898); c'est cette Note que je vais d'abord développer, et j'indiquerai ensuite les remarques faites

cet été dans mon Cours pour le cas d'une équation à deux variables.

1. Considérons donc d'abord l'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f(y, x),$$

où f est une fonction positive et croissante de y , quand x varie entre a et b ($a < b$). Prenons d'abord l'équation très simple

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f(x).$$

où $f(x)$ désigne une fonction continue de x et de signe constant dans l'intervalle (a, b) et formons l'intégrale y de cette équation s'annulant pour $x = a$ et $x = b$. Au lieu de lui donner la forme élémentaire classique, écrivons-la avec M. Burkhardt (*Bulletin de la Société mathématique*, 1894) sous la forme

$$y(x) = - \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi,$$

où la fonction G , sorte de fonction de Green relative à l'intervalle (a, b) , est définie par les égalités

$$\begin{aligned} G(x, \xi) &= \frac{(b-x)(\xi-a)}{b-a} & \text{pour } \xi < x, \\ G(x, \xi) &= \frac{(b-\xi)(x-a)}{b-a} & \text{pour } \xi > x. \end{aligned}$$

Il est facile de voir que si α désigne un nombre positif fixe entre a et b , on peut trouver un nombre positif μ dépendant uniquement de a , b et α [non de $f(x)$ et de x], tel que l'on ait

$$G(x, \xi) < \mu G(\alpha, \xi).$$

Pour l'établir, il suffit d'examiner successivement les diverses dispositions de α , x et ξ dans l'intervalle (a, b) . Ainsi, soit

$$\alpha < x < \xi,$$

on aura

$$\begin{aligned} G(x, \xi) &= \frac{(b-\xi)(x-a)}{b-a}, \\ G(\alpha, \xi) &= \frac{(b-\xi)(\alpha-a)}{b-a}. \end{aligned}$$

L'inégalité précédente devient

$$x - a < \mu(x - a).$$

Elle sera vérifiée si μ est supérieur à $\frac{b-a}{a-a}$. Avec toute autre disposition de α , x et ξ , on trouve de même un nombre μ convenable; le plus grand de ces différents nombres convient à notre objet; il dépend seulement de a , b , α .

Ceci posé, si l'on revient à la fonction $y(x)$, on aura évidemment

$$|y(x)| < \mu |y(\alpha)|.$$

2. Formons maintenant les diverses équations

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y_1}{dx^2} &= f(0, x), \\ \frac{d^2 y_2}{dx^2} &= f(y_1, x), \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{d^2 y_n}{dx^2} &= f(y_{n-1}, x). \end{aligned}$$

Pour une valeur, quelconque d'ailleurs, donnée à x

$$y_1(x), y_2(x), \dots, y_{2n+1}(x), \dots,$$

tendent vers une limite par valeurs croissantes; d'autre part

$$y_1(x), y_3(x), \dots, y_{2n}(x), \dots,$$

tendent vers une limite par valeurs décroissantes. On a

$$\frac{d^2(y_n - y_{n-1})}{dx^2} = f(x, y_{n-1}) - f(x, y_{n-2}),$$

et par conséquent, d'après la remarque précédente,

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| < \mu |y_n(\alpha) - y_{n-1}(\alpha)|.$$

Ceci montre clairement que, pour une même parité de n , la fonction $y_n(x)$ tend uniformément dans l'intervalle (a, b) vers sa limite, puisque la série de terme général

$$y_n(x) - y_{n-1}(x)$$

converge comme la série de terme général

$$y_n(\alpha) - y_{n-1}(\alpha).$$

3. Il est donc bien établi que les approximations successives nous conduisent à *deux* fonctions u et v satisfaisant aux deux équations

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = f(v, x), \quad \frac{d^2 v}{dx^2} = f(u, x).$$

u et v s'annulant pour $x = a$ et $x = b$.

Nous savons, d'autre part, qu'il existe une intégrale et une seule y de l'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f(y, x),$$

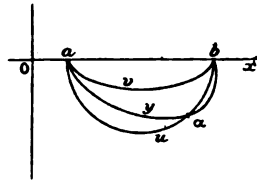
s'annulant pour $x = a$ et $x = b$; c'est ce qui résulte de mes recherches antérieures. Je veux ajouter une remarque relative à la *position* de y . Je dis que l'on a (pour toute valeur de x entre a et b)

$$u < y < v,$$

ou, en d'autres termes, *que l'intégrale y est intermédiaire entre u et v .*

Pour le démontrer, il suffit d'examiner les différentes circonstances qui pourraient se présenter s'il en était autrement. Supposons, par exemple, que l'on ait la disposition de la *fig. 1*,

Fig. 1.



où y rencontre u en un point α . Entre α et b , on a

$$v > u > y \quad (y, u \text{ et } v \text{ sont négatifs}).$$

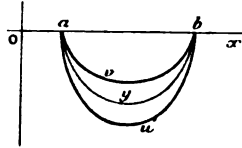
Or on a

$$\frac{d^2 (y - u)}{dx^2} = f(y, x) - f(v, x).$$

Le second membre est négatif dans (α, b) . Donc $y - u$ qui s'annule en α et b devra être positif d'après cette équation ; nous

arrivons ainsi à une contradiction. On verra tout aussi aisément que l'on arrive dans tous les cas à une absurdité, sauf si l'on a la fig. 2, où y est constamment entre u et v .

Fig. 2.



4. C'est dans le cas particulier de l'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = ey,$$

que j'ai montré ⁽¹⁾ que les deux limites u et v étaient distinctes quand l'intervalle (a, b) est assez grand. On peut évidemment donner une autre forme à ce résultat. Laissons l'intervalle (a, b) fixe, et envisageons l'équation avec le paramètre positif k

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = k ey.$$

Si l'on fait croître k à partir de zéro, on a d'abord

$$u = y = v.$$

A partir d'une certaine valeur k_0 de k , u cesse d'être égale à v , et y est intermédiaire entre ces deux fonctions. Il y a là quelque chose d'assez curieux. La fonction y , pour une valeur fixe et arbitraire d'ailleurs de x entre a et b , est manifestement une fonction analytique de k pour toute valeur positive de k . Tant que u et v coïncident, elles sont identiques à y et sont par suite des fonctions analytiques de k , mais, au delà de k_0 , on peut se demander quelle sera la nature de u et de v regardées comme fonction de k ; elles ne seront certainement pas le prolongement analytique de la fonction y , car alors elles coïncideraient. Elles peuvent représenter, au delà de k_0 , des fonctions analytiques de k , qui ne seraient pas susceptibles de se prolonger analytiquement en deçà

⁽¹⁾ *Comptes rendus* (1894) et *Traité d'Analyse*, t. III, p. 147.

de k_0 , ou bien encore elles pourraient être des fonctions non analytiques de k . Cette étude présenterait peut-être quelque intérêt ⁽¹⁾.

5. Il faut examiner maintenant le cas de l'équation aux dérivées partielles

$$\Delta u = f(u, x, y),$$

pour établir la convergence *uniforme* des u d'indices pairs et des u d'indices impairs vers leurs limites respectives. Je ne traiterai pas le cas général, et je vais supposer que f , regardée comme fonction de x et y , soit seulement fonction de $\sqrt{x^2 + y^2}$, le contour C étant supposé une circonférence ayant son centre à l'origine.

Commençons par étudier l'équation

$$\Delta u = f(x, y),$$

f ne dépendant que de $\sqrt{x^2 + y^2}$ et ayant un signe constant (soit le signe *plus*) dans C . L'intégrale u de l'équation précédente s'annulant sur C est donnée par la formule

$$u = -\frac{1}{2\pi} \iint G(\xi, \eta; x, y) f(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

G étant la fonction de Green relative à C et au point (x, y) ; u est négative et ne dépend que de $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, d'après l'hypothèse faite sur f . Je dis que la plus grande valeur absolue de u correspond à $x = y = 0$. En effet, si le minimum de u n'avait pas lieu pour $x = y = 0$, il y aurait certainement, u ne dépendant que de r , des valeurs de (x, y) dans C pour lesquelles u passerait par un maximum. Or ceci est impossible, car, pour une telle valeur, on aurait

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \leq 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \leq 0,$$

ce qui est incompatible avec

$$\Delta u = f(x, y),$$

où $f(x, y)$ est toujours positif.

⁽¹⁾ On trouvera encore posées d'autres questions concernant les approximations successives à la fin de ma Note des *Comptes rendus* (14 février 1898).

Si maintenant nous revenons aux approximations successives, il est clair que

$$|u_n - u_{n-1}|$$

sera maximum pour $x = y = 0$. La convergence *uniforme* dans le cercle C de $u_n(x, y)$ vers sa limite, pour une même parité de n , en résulte immédiatement, puisque la série donnant la limite cherchée se compare immédiatement à la même série pour $x = y = 0$; cette valeur particulière joue ici le même rôle, et dans des circonstances plus simples, que jouait tout à l'heure $x = \alpha$.

Il resterait à examiner le cas où $f(u, x, y)$ ne dépend pas seulement de $\sqrt{x^2 + y^2}$. Il n'est pas douteux que, dans ce cas aussi, on a les convergences *uniformes* vers les deux limites, mais la démonstration rigoureuse semble devoir entraîner à quelques longueurs et se présenter moins élégamment que les précédentes; je ne m'y arrêterai pas.

SUR LE CENTRE DE GRAVITÉ D'UN QUADRILATÈRE;

Par M. F. CASPARY.

1. M. Mannheim vient d'énoncer (*Bull. de la Soc. Math.*, t. XXVII, p. 148) le beau théorème suivant, relatif au centre de gravité d'un trapèze : *AB, CD sont les côtés parallèles d'un trapèze; par les extrémités C, D du plus petit de ces côtés, on mène des parallèles aux diagonales du trapèze; ces droites et le côté AB prolongé forment un triangle dont le centre de gravité coïncide avec celui du trapèze.*

D'après ce théorème, le centre de gravité du trapèze coïncide avec le centre de gravité du triangle PRS, P étant le point d'intersection des parallèles aux diagonales AC et BD du trapèze ABCD, et R, S les points où le côté AB prolongé coupe les droites PD, PC.

2. Je fais remarquer que le centre de gravité du trapèze ABCD coïncide aussi avec le centre de gravité du triangle PAB et que le même théorème subsiste encore pour un quadrilatère quelconque.

On peut démontrer très aisément ce théorème et quelques autres analogues, à l'aide des notions et formules de mon Mémoire : *Ap-*

plications des méthodes de Grassmann. Centre de gravité d'un quadrilatère et d'un pentagone (Nouvelles Annales, 3^e série, t. XVII, 1898, p. 389).

Soient A_1, A_2, A_3, A_4 les quatre sommets d'un quadrilatère quelconque, O le point d'intersection des deux diagonales A_1A_3 et A_2A_4 ; $M_{12}, M_{23}, \dots$ les milieux des côtés $A_1A_2, A_2A_3, \dots$; M_{13}, M_{24} les milieux des diagonales A_1A_3, A_2A_4 . Si l'on mène par les sommets opposés A_1 et A_3 deux parallèles à la diagonale A_2A_4 , et par les deux autres sommets opposés A_2 et A_4 deux autres parallèles à la diagonale A_1A_3 , on obtient un parallélogramme dont $M'_{12}, M'_{23}, M'_{34}, M'_{41}$ sont les sommets et où le point M'_{12} est le point d'intersection des parallèles menées par A_3 et $A_1, \dots$ (voir p. 396 et 397). De même on obtient les points M'_{21} et M'_{13} , si l'on construit sur la diagonale A_1A_3 le point M'_2 , et sur la diagonale A_2A_4 le point M'_{13} , de telle façon que $A_1O = M'_2A_3$ et $A_3O = M'_{13}A_2$. Ces six points M'_{lm} se construisent aussi immédiatement par les relations $OM_{ik} = M_{ik}M'_{lm}$, où les quatre indices i, k, l, m désignent, dans un ordre quelconque, les quatre indices 1, 2, 3, 4.

Au moyen des Formules (2), (7) et (8) de mon Mémoire précité (p. 393 et 396), le centre de gravité G du quadrilatère $A_1A_2A_3A_4$ et les points M'_{lm} s'expriment ainsi :

$$(1) \quad 3G = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 - O,$$

$$(2) \quad M'_{lm} = A_i + A_k - O \quad \left(\begin{matrix} i, k, l, m = 1, 2, 3, 4; \\ i \neq k \neq l \neq m \end{matrix} \right).$$

Par conséquent, on a

$$(3) \quad 3G = A_l + A_m + M'_{lm},$$

$$(4) \quad 3G = M'_{ik} + M'_{lm} + O.$$

On a dès lors le théorème suivant :

I. Les 12 triangles $A_lA_mM'_{lm}$ et $M'_{ik}M'_{lm}O$ ($i, k, l, m = 1, 2, 3, 4$; $i \neq k \neq l \neq m$) ont le même centre de gravité; celui-ci coïncide avec le centre de gravité du quadrilatère $A_1A_2A_3A_4$ (¹).

(¹) Comme le centre de gravité des 6 triangles $A_lA_mM'_{lm}$ est situé sur les segments $M_{lm}M'_{lm}$, la première partie du théorème précédent n'est qu'un énoncé modifié des théorèmes V et VI de mon Mémoire précité.

3. La formule (1) donne naissance encore à d'autres constructions du centre de gravité d'un quadrilatère.

Si l'on mène, par les points M'_{12} et M'_{34} , des parallèles aux côtés A_1A_2 et A_3A_4 , de façon que $M'_{12}K_1 = A_1A_2 = K_2M'_{12}$ et $M'_{34}K_3 = A_3A_4 = K_4M'_{34}$, on a

$$\begin{cases} K_1 - M'_{12} = A_2 - A_1 = M'_{12} - K_2, \\ K_3 - M'_{34} = A_4 - A_3 = M'_{34} - K_4, \end{cases}$$

ou

$$(5) \quad \begin{cases} K_1 = M'_{12} + A_2 - A_1 = -A_1 + A_2 + A_3 + A_4 - O, \\ K_2 = M'_{12} - A_2 + A_1 = A_1 - A_2 + A_3 + A_4 - O, \\ K_3 = M'_{34} + A_4 - A_3 = A_1 + A_2 - A_3 + A_4 - O, \\ K_4 = M'_{34} - A_4 + A_3 = A_1 + A_2 + A_3 - A_4 - O; \end{cases}$$

donc

$$(6) \quad K_i + 2A_i = K_k + 2A_k = 3G \quad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

ou

$$(7) \quad K_i - K_k = 2(A_k - A_i).$$

II. Si l'on mène par les points M'_{12} , M'_{23} , M'_{34} , M'_{41} , des parallèles aux côtés A_1A_2 , A_2A_3 , A_3A_4 , A_4A_1 , on obtient le quadrilatère $K_1K_2K_3K_4$. Les points M'_{12} , ..., M'_{41} sont les milieux des côtés K_1K_2 , ..., K_4K_1 et les points M'_{13} et M'_{24} les milieux des diagonales K_1K_3 et K_2K_4 . Les quatre segments A_1K_1 , A_2K_2 , A_3K_3 , A_4K_4 concourent au centre de gravité G du quadrilatère $A_1A_2A_3A_4$, et le point G est situé sur chaque segment de façon que $A_iG = \frac{1}{2}GK_i$.

4. Les points K_i sont liés très simplement aux points G_i , centres de gravité des triangles $A_kA_lA_m$. Comme les points G_i s'expriment par les formules

$$(8) \quad 3G_i = A_k + A_l + A_m,$$

les relations (5) prennent la forme

$$(9) \quad K_i = 3G_i - 2Q_i,$$

où

$$(10) \quad 2Q_i = A_i + O;$$

donc

III. Si l'on désigne par G_i les centres de gravité des

triangles $A_k A_l A_m$; par Q_i les milieux des segments $A_i O$, les points K_i sont situés sur les droites $G_i Q_i$ de façon que $Q_i G_i = \frac{1}{2} G_i K_i$.

5. Les centres de gravité G_i suffisent pour construire le centre de gravité G .

D'après les formules (1) et (3) de mon Mémoire précité (p. 392 et 393), le point d'intersection O des diagonales $A_1 A_3$ et $A_2 A_4$ est représenté par les formules

$$\delta O = \delta_1 A_1 + \delta_3 A_3 = \delta_2 A_2 + \delta_4 A_4,$$

où $\delta_1 + \delta_3 = \delta_2 + \delta_4 = \delta$ et $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ désignent les aires des triangles $A_2 A_3 A_4, A_3 A_4 A_1, A_4 A_1 A_2, A_1 A_2 A_3$. Par conséquent, on obtient aisément

$$(11) \quad \begin{cases} \delta_1 G_1 + \delta_3 G_3 = \delta G, \\ \delta_2 G_2 + \delta_4 G_4 = \delta G, \end{cases}$$

et de plus

$$(12) \quad \begin{cases} 3(G_3 - G_1) = A_1 - A_3, \\ 3(G_4 - G_2) = A_2 - A_4, \\ 3(G - G_i) = A_i - O. \end{cases}$$

Donc

IV. Les segments $G_1 G_3, G_2 G_4$ dont le point d'intersection G est le centre de gravité du quadrilatère $A_1 A_2 A_3 A_4$ sont parallèles aux segments $A_3 A_1, A_4 A_2$ et égaux à $\frac{1}{3} A_3 A_1, \frac{1}{3} A_4 A_2$; les segments $G_i G$ sont parallèles aux segments OA_i et égaux à $\frac{1}{3} OA_i$.

SUR UNE PROPRIÉTÉ ARITHMÉTIQUE DES LOGARITHMES DES NOMBRES ALGÈBRIQUES;

Par M. CARL STÖRMER.

1. Sur l'approximation des nombres incommensurables par des nombres rationnels.

Soit α un nombre incommensurable réel et positif. Comme on le sait, on peut le mettre d'une seule manière sous la forme d'une

fraction continue illimitée

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_n + \dots}}}$$

où a_0 est un nombre entier positif ou $= 0$ et où $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ sont tous entiers et positifs. Désignons par $\frac{P_n}{Q_n}$ les réduites successives de cette fraction continue, de manière que

$$\begin{aligned} P_1 &= a_0, & P_2 &= a_1 a_0 + 1, & \dots, & P_{n+1} &= a_n P_n + P_{n-1}, & \dots, \\ Q_1 &= 1, & Q_2 &= a_1, & \dots, & Q_{n+1} &= a_n Q_n + Q_{n-1}, & \dots \end{aligned}$$

P_n et Q_n sont alors des nombres entiers positifs premiers entre eux.

Comme on le sait, la première démonstration d'existence des nombres transcendants, due à Liouville (1), est basée sur une propriété remarquable des nombres a_n dans le cas où α est un nombre algébrique.

En effet, si α est une racine d'une équation algébrique à coefficients entiers et de degré r , on a l'inégalité suivante

$$(1) \quad a_n < M Q_n^{r-2},$$

où M est un nombre qui ne dépend pas de n .

Dans le présent Mémoire nous allons établir une inégalité pareille pour les nombres positifs de la forme

$$\alpha = \frac{\log A}{\log B},$$

où A et B sont des nombres algébriques; par conséquent aussi pour les *logarithmes vulgaires des nombres algébriques*. (Cas $B = 10$.)

Commençons par quelques généralités. Suivons un procédé indiqué par M. Borel dans son exposé des recherches de Liouville (2). Soit $f(x)$ une fonction analytique réelle de la variable réelle x , admettant le nombre α comme zéro simple, et régulière en ce

(1) *Journal de Liouville*, t. XVI.

(2) BOREL, *Leçons sur la théorie des fonctions*, p. 26.

point. Soit a, b un intervalle réel contenant α et assez petit pour que $f(x)$ soit régulière et n'ait pas d'autres zéros dans cet intervalle.

Soit $\frac{p}{q}$ une fraction irréductible, valeur approchée de α et contenue dans a, b .

Pour toute valeur x contenue dans l'intervalle a, b , on a

$$|f'(x)| < M,$$

où M est une constante ne dépendant que de l'intervalle a, b . En appliquant la formule de Taylor arrêtée à son premier terme, on a

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{p}{q} - \alpha\right) f'\left[\alpha + \theta\left(\frac{p}{q} - \alpha\right)\right], \quad 0 < \theta < 1.$$

Or, $\alpha + \theta\left(\frac{p}{q} - \alpha\right)$ étant contenue dans l'intervalle a, b , on aura

$$\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| < \left|\frac{p}{q} - \alpha\right| M,$$

ce qui donne

$$(2) \quad \left|\frac{p}{q} - \alpha\right| > \frac{\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right|}{M}.$$

Si, en particulier, $\frac{p}{q}$ est une des réduites $\frac{P_n}{Q_n}$ de α développé en fraction continue, on a l'inégalité suivante (1) :

$$(3) \quad \left|\frac{P_n}{Q_n} - \alpha\right| < \frac{1}{a_n Q_n^2}$$

ce qui donne

$$(4) \quad a_n < \frac{M}{Q_n^2 \left|f\left(\frac{P_n}{Q_n}\right)\right|}.$$

Pour en déduire des inégalités comme (1) il faut trouver une limite inférieure simple de $\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right|$ exprimée comme fonction de q par exemple. C'est ce qui est très facile dans le cas où $f(x)$ est un polynôme de x à coefficients entiers et de degré r . En effet,

(1) BOREL, *Leçons sur la théorie des fonctions*, p. 30.

ce polynome étant supposé n'avoir pas de racine rationnelle, on a

$$(5) \quad \left| f\left(\frac{p}{q}\right) \right| > \frac{1}{q^r},$$

ce qui donne immédiatement l'inégalité de Liouville (1).

2. Inégalités fondamentales pour les logarithmes.

Soient A et B deux nombres positifs qu'on peut supposer pour plus de simplicité > 1 . Posons

$$(6) \quad \frac{\log A}{\log B} = \alpha$$

et supposons que α soit incommensurable. Pour cela il faut et il suffit qu'il n'existe pas de nombres entiers positifs m et n tels que $A^m = B^n$.

Nous allons appliquer à ce nombre α le procédé que nous avons indiqué. A et B étant > 1 , α sera positif. Conservons les mêmes notations qu'auparavant. Alors α est racine positive de l'équation

$$B^x - A = 0$$

et la fonction f aura la valeur

$$f(x) = B^x - A,$$

d'où

$$f'(x) = B^x \log B.$$

Nous allons trouver une limite inférieure pour $\left| f\left(\frac{p}{q}\right) \right|$. α étant incommensurable, cette quantité est positive. Posons

$$(7) \quad \begin{cases} \left| f\left(\frac{p}{q}\right) \right| = \left| B^{\frac{p}{q}} - A \right| = A \varepsilon, \\ | B^p - A^q | = A^q \varepsilon'. \end{cases}$$

Nous allons distinguer deux cas : $B^p > A^q$ et $B^p < A^q$.

Dans le *premier cas* on aura

$$1 + \varepsilon = (1 + \varepsilon')^{\frac{1}{q}}.$$

En prenant les logarithmes et en appliquant la formule approchée

$$\log(1+x) = \frac{x}{1+\theta x}, \quad 0 < \theta < 1,$$

on en déduit

$$\frac{\varepsilon}{1+\theta\varepsilon} = \frac{1}{q} \frac{\varepsilon'}{1+\theta'\varepsilon'},$$

θ et θ' étant compris entre zéro et 1. Cela donne

$$(8) \quad \varepsilon > \frac{1}{q} \frac{\varepsilon'}{1+\varepsilon'},$$

Dans le *second cas* on aura sûrement ε et ε' moindres que 1 et

$$1-\varepsilon = (1-\varepsilon')^{\frac{1}{q}},$$

d'où l'on tire, comme auparavant,

$$\frac{\varepsilon}{1-\theta\varepsilon} = \frac{1}{q} \frac{\varepsilon'}{1-\theta'\varepsilon'},$$

d'où

$$\varepsilon > \frac{\varepsilon'}{q} (1-\varepsilon)$$

et comme $\varepsilon < 1$

$$\varepsilon \left(1 + \frac{\varepsilon'}{q}\right) > \frac{\varepsilon'}{q},$$

ce qui donne

$$(9) \quad \varepsilon > \frac{1}{q} \frac{\varepsilon'}{1+\varepsilon'}.$$

Des inégalités (8) et (9) on tire

$$(10) \quad \left| f\left(\frac{p}{q}\right) \right| > \frac{A}{q} \frac{\varepsilon'}{1+\varepsilon'}$$

où ε' est donné par la formule (7). En substituant cette valeur dans la formule (2), il viendra

$$(11) \quad \left| \frac{p}{q} - \alpha \right| > \frac{A}{qM} \frac{\varepsilon'}{1+\varepsilon'}.$$

Cela posé, considérons les quotients incomplets $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ de α développé en fraction continue illimitée. En combi-

nant les inégalités (4) et (10) on obtient

$$(12) \quad a_n < \frac{M}{A} \frac{1 + \varepsilon_n}{Q_n \varepsilon_n}$$

où

$$(13) \quad \varepsilon_n = \frac{|B^{p_n} - A^{q_n}|}{A^{q_n}}.$$

Or, comme a_n est un nombre entier, il faut que ε_n pour n croissant soit de l'ordre de Q_n^{-1} . Par conséquent on peut trouver un nombre positif K indépendant de n et ne dépendant que de A et B , tel que

$$\frac{M}{A} (1 + \varepsilon_n) < K,$$

ce qui donne

$$(14) \quad a_n < K \frac{A^{q_n}}{Q_n |B^{p_n} - A^{q_n}|}.$$

3. Propriétés des logarithmes des nombres algébriques.

Jusqu'ici nous n'avons pas fait d'autres hypothèses sur la nature des nombres A et B , que de les supposer plus grands que 1 et tels que $\alpha = \frac{\log A}{\log B}$ soit incommensurable. Admettons de plus qu'ils soient des nombres algébriques. Soient, respectivement,

$$(15) \quad M_0 A^\mu + M_1 A^{\mu-1} + \dots + M_{\mu-1} A + M_\mu = 0 \quad (M_0 > 0)$$

et

$$(16) \quad N_0 B^\nu + N_1 B^{\nu-1} + \dots + N_{\nu-1} B + N_\nu = 0 \quad (N_0 > 0)$$

les équations irréductibles aux coefficients entiers, auxquelles satisfont A et B . Désignons par

$$A_1 = A, \quad A_2, \quad A_3, \quad \dots, \quad A_u$$

les racines de l'équation (15) et par

$$B_1 = B, \quad B_2, \quad B_3, \quad \dots, \quad B_v$$

les racines de (16). Posons

$$(17) \quad M_0^q N_0^p (A^q - B^p) = z.$$

Comme $\alpha = \frac{\log A}{\log B}$ est supposé incommensurable, z sera différent de zéro. Nous allons éliminer A et B entre les équations (15), (16) et (17). Posons

$$M_0^q N_0^p (A_i^q - B_j^p) = N_0^p (M_0 A_i)^q - M_0^q (N_0 B_j)^p = z_{i,j}.$$

Alors z sera racine de l'équation algébrique

$$(18) \quad \prod_{i,j} (z - z_{i,j}) = 0,$$

le produit étant étendu aux valeurs

$$\begin{aligned} i &= 1, 2, 3, \dots, \mu, \\ j &= 1, 2, 3, \dots, \nu. \end{aligned}$$

En effectuant la multiplication au premier membre de (18), cette équation peut s'écrire

$$(18') \quad z^{\mu\nu} + C_1 z^{\mu\nu-1} + \dots + C_p z^{\mu\nu-p} + \dots + C_{\mu\nu} = 0.$$

Les coefficients C_p seront des *nombre entiers ou nuls*. En effet C_p est une fonction symétrique des quantités $M_0 A_i$, dont les coefficients sont des fonctions symétriques aux coefficients entiers des $N_0 B_j$. Comme les $M_0 A_i$ et les $N_0 B_j$ sont respectivement racines des équations

$$x^\mu + M_1 x^{\mu-1} + M_0 M_2 x^{\mu-2} + \dots + M_0^{\mu-1} M_\mu = 0$$

et

$$x^\nu + N_1 x^{\nu-1} + N_0 N_2 x^{\nu-2} + \dots + N_0^{\nu-1} N_\nu = 0,$$

il s'ensuit, par la théorie des fonctions symétriques (¹), que C_p est un polynome aux coefficients entiers des coefficients de ces deux équations et, par conséquent, égal à un nombre entier ou nul.

Cela posé, nous allons trouver une *limite supérieure des nombres* $|C_p|$. On a évidemment, en désignant par K un nombre plus grand que tous les $|A_i|$ et $|B_j|$,

$$|z_{i,j}| < M_0^q N_0^p (K^p + K^q).$$

(¹) Voir, par exemple, SERRET : *Cours d'Algèbre supérieure*, t. I, p. 317.

Or, $\frac{p}{q}$ étant une valeur approchée de α , on peut supposer qu'il existe un nombre positif $r > 1$ et tel qu'on a pour tous les p et q

$$rq > p.$$

Cela donne

$$|z_{i,j}| < 2[M_0 N_0^r K^r]^q.$$

On en tire que

$$|C_p| < \lambda (M_0 N_0^r K^r)^{pq} < \lambda (M_0 N_0^r K^r)^{\mu\nu q}$$

où λ ne dépend que de μ et de ν et non de p et de q . En posant

$$(M_0 N_0^r K^r)^{\mu\nu} = N,$$

on aura ainsi l'inégalité cherchée

$$(19) \quad |C_p| < \lambda N^q,$$

λ et N étant des nombres fixes, dépendant de la nature de A et de B et non de p et de q .

Cela posé, il est facile de trouver une limite inférieure de $|z|$. Si l'équation (18) a des racines nulles, soient

$$C_{\mu\nu} = 0, \quad C_{\mu\nu-1} = 0, \quad \dots, \quad C_{\mu\nu-\lambda+1} = 0$$

et

$$C_{\mu\nu-\lambda} \geq 0.$$

Comme les coefficients C sont des nombres entiers ou nuls, on aura

$$(20) \quad |C_{\mu\nu-\lambda}| \geq 1.$$

Alors, le nombre z , défini par l'équation (17) et, d'après notre hypothèse, différent de zéro, est racine de l'équation

$$(21) \quad z^{\mu\nu-\lambda} + C_1 z^{\mu\nu-\lambda-1} + \dots + C_{\mu\nu-\lambda} = 0, \quad (\lambda \geq 0).$$

Or, comme on le sait (1), on a l'inégalité suivante

$$|z| > \frac{|C_{\mu\nu-\lambda}|}{|C| + |C_{\mu\nu-\lambda}|}$$

où $|C|$ est le plus grand des nombres $|C_1|, |C_2|, \dots, |C_{\mu\nu-\lambda-1}|$.

(1) Voir, par exemple, SERRET : *Cours d'Algèbre supérieure*, t. I, p. 88.

En tenant compte des relations (19) et (20), cela donne

$$|z| > \frac{r}{2\lambda N^q},$$

ce qui donne, en substituant la valeur de z et en remarquant que $rq > p$,

$$|A^q - B^p| > \frac{1}{2\lambda(M_0 N_0^r N)^q}$$

ou bien

$$(22) \quad |A^q - B^p| > \frac{\lambda_1}{N_1^q}$$

où λ_1 et N_1 sont des nombres fixes dépendant seulement de la nature de A et de B et non de p et de q .

Cela posé nous allons considérer le développement de α en fraction continue. En combinant les inégalités (14) et (22), on obtiendra le théorème suivant :

THÉORÈME. — Soient A et B deux nombres algébriques positifs et > 1 et supposons que

$$\alpha = \frac{\log A}{\log B}$$

soit incommensurable. Développons α en fraction continue illimitée

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_n + \dots}}}$$

et désignons par $\frac{P_n}{Q_n}$ la $n^{\text{ième}}$ réduite de cette fraction continue de manière que

$$\begin{array}{llll} P_1 = a_0, & P_2 = a_1 a_0 + 1, & \dots, & P_{n+1} = a_n P_n + P_{n-1}, \quad \dots, \\ Q_1 = 1, & Q_2 = a_1, & \dots, & Q_{n+1} = a_n Q_n + Q_{n-1}, \quad \dots \end{array}$$

Alors on aura l'inégalité suivante

$$(23) \quad a_n < K \frac{M Q_n}{Q_n}$$

où K et M sont des nombres fixes dépendant de la nature de A et de B et indépendants de n .

4. Cas particuliers. Applications.

Faisons d'abord cette remarque bien évidente que, si $B = 10$, α se réduira au *logarithme vulgaire* du nombre algébrique A .

Considérons un autre cas très simple, celui où A et B sont des nombres entiers. Rappelons la formule (14)

$$a_n < K \frac{A^{Q_n}}{Q_n |B^{P_n} - A^{Q_n}|}$$

où K est un nombre fixe plus grand que $\frac{M}{A} (1 + \varepsilon_n)$. M est une limite supérieure de $|B^x \log B|$ dans un intervalle comprenant α et tous les $\frac{P_n}{Q_n}$ et ε_n est définie par

$$\varepsilon_n = \frac{|B^{P_n} - A^{Q_n}|}{A^{Q_n}}.$$

Nous allons chercher des limites supérieures de M et de ε_n , ce qui donne une valeur de K . Considérons d'abord M . Comme

$$\left| \frac{P_n}{Q_n} - \alpha \right| < \frac{1}{\alpha_n Q_n^2} < 1$$

toutes les $\frac{P_n}{Q_n}$ seront comprises dans l'intervalle $\alpha - 1$, $\alpha + 1$ et, par conséquent, on peut poser

$$M = B^{\alpha+1} \log B,$$

et, comme $B^\alpha = A$,

$$(24) \quad M = AB \log B.$$

Considérons la quantité ε_n . En multipliant l'inégalité (3) par $Q_n \log B$, et en se rappelant la valeur de α , on obtient

$$|P_n \log B - Q_n \log A| < \frac{\log B}{\alpha_n Q_n} < \log B$$

ou bien

$$\left| \log \frac{B^{P_n}}{A^{Q_n}} \right| < \log B.$$

Si $B^{P_n} > A^{Q_n}$ on en déduit

$$(25) \quad 1 + \varepsilon_n < B.$$

Si, au contraire, $B^{p_n} < A^{q_n}$, on aura $\varepsilon_n < 1$ et

$$\frac{1}{1 - \varepsilon_n} < B$$

et l'on retombe sur l'inégalité ci-dessus en remarquant que $B > 1$.

On voit ainsi, par les inégalités (24) et (25), qu'on peut prendre pour K le nombre $B^2 \log B$, de sorte que la relation (14) prend la forme

$$(14') \quad a_n < \frac{A^{q_n} B^2 \log B}{Q_n |B^{p_n} - A^{q_n}|}.$$

En remarquant que $|B^{p_n} - A^{q_n}| \geq 1$, on en déduit le théorème suivant, corollaire de notre théorème général :

Soient A et B deux nombres entiers > 1 et tels que $\alpha = \frac{\log A}{\log B}$ est incommensurable. En développant α en fraction continue et en conservant les mêmes notations qu'auparavant, on aura

$$(26) \quad a_n < \frac{A^{q_n}}{Q_n} B^2 \log B.$$

Du théorème général on peut tirer des conséquences intéressantes pour la théorie des nombres transcendants. En effet, si l'on forme une fraction continue illimitée, où $a_n \geq F(n)$, $F(n)$ étant $> K \frac{M^{q_n}}{Q_n}$ pour n assez grand, et cela quels que soient les nombres K et M , l'inégalité (23) ne peut pas subsister pour n assez grand, et comme il en sera de même pour l'inégalité de Liouville (1), la valeur de la fraction continue sera un nombre transcendant qui ne sera pas égal à un nombre de la forme $\frac{\log A}{\log B}$, A et B étant des nombres algébriques positifs et > 1 .

Il suffit, pour cela, de poser, par exemple,

$$a_n = n^{q_n}.$$

Alors le nombre

$$a_0 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} + \dots$$

sera un nombre transcendant qui ne sera pas égal à un nombre de la forme $\frac{\log A}{\log B}$, A et B étant algébriques, positifs et > 1 , et, par conséquent, *qui ne sera pas égal à un logarithme vulgaire d'un nombre algébrique positif.*

Remarquons que l'existence de pareils nombres transcendants découle *a priori* des recherches de Cantor. En effet, il a démontré que l'ensemble des nombres transcendants a la puissance du continu, tandis que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable⁽¹⁾; comme il en est de même de l'ensemble des nombres $\frac{\log A}{\log B}$, A et B étant algébriques, il s'ensuit qu'il y a encore une infinité non dénombrable de nombres transcendants de la propriété demandée.

De même que nous avons traité, dans ce Mémoire, des nombres de la forme $\frac{\log A}{\log B}$, on pourrait appliquer le même procédé aux nombres

$$\frac{\operatorname{arctang} A}{\operatorname{arctang} B}, \quad \frac{\operatorname{arcsin} A}{\operatorname{arcsin} B}, \quad \frac{\int_0^A \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}}{\int_0^B \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}}, \quad \dots$$

et à une infinité d'autres.

PROBLÈME DE PARTITION;

Par M. Maurice D'OCAGNE.

De combien de manières peut-on former une somme de S francs avec S pièces de monnaie d'argent françaises?

Notations. — Nous représentons par $E\left(\frac{A}{n}\right)$ et $R\left(\frac{A}{n}\right)$ le quotient entier et le reste de la division de A par n. Nous écrirons aussi A_n pour $E\left(\frac{A}{n}\right)$. Si la quantité A est susceptible de plusieurs valeurs, $m(A)$ et $M(A)$ désigneront la plus petite et la plus

⁽¹⁾ Voir BOREL : *Leçons*, etc., p. 24, et *Journal de Crelle*, t. 77.

grande d'entre elles. Nous écrirons aussi $m^2(A)$ pour $m[m(A)]$, $Mm(A)$ pour $M[m(A)]$, etc.

Formation des solutions. — Si nous désignons par

u	le nombre des pièces de	5,00,
v	»	2,00,
x	»	1,00,
$2y$	»	0,50,
$5z$	»	0,20

les équations du problème sont (1)

$$\begin{aligned} 5u + 2v + x + y + z &= S, \\ u + v + x + 2y + 5z &= S, \end{aligned}$$

qu'il s'agit de résoudre en nombres entiers et positifs pouvant être nuls.

Éliminant successivement y et x entre ces deux équations, on a

$$\begin{aligned} (1) \quad x &= S - 3(3u + v - z), \\ (2) \quad y &= v - 4(z - u). \end{aligned}$$

Les quantités y et x ne pouvant être négatives, il faut que

$$(3) \quad 4(z - u) \leq v \leq \frac{S - 9u + 3z}{3}.$$

D'ailleurs la quantité v ne pouvant non plus être négative, il faut, dans cette double inégalité, que la limite supérieure soit au moins égale à 0 et au moins égale à la limite inférieure, ce qui donne

$$(4) \quad 3z - \frac{S}{3} \leq u \leq \frac{S + 3z}{9}.$$

A son tour, pour la même raison appliquée cette fois à u , cette double inégalité exige

$$(5) \quad 0 \leq z \leq \frac{S}{6}.$$

(1) Ces équations montrent qu'à toute solution en correspond une autre obtenue par permutation simultanée de u et z et de v et y . Deux telles solutions peuvent être dites *inverses* l'une de l'autre. Le problème revient alors à dénombrer les solutions *inversables* d'une équation linéaire donnée.

On formera donc toutes les solutions des équations proposées en associant à chacune des valeurs entières de z satisfaisant à (5) toutes les valeurs entières de u satisfaisant à (4), puis à chacun des systèmes (z, u) ainsi obtenus toutes les valeurs entières de v satisfaisant à (3). A chaque système (z, u, v) ainsi déterminé correspondent les valeurs de x et y données par (1) et (2).

Solutions limites. — L'inégalité (5) donne immédiatement, avec les notations ci-dessus définies,

$$(6) \quad m(z) = 0,$$

$$(7) \quad M(z) = S_6.$$

Au sujet de cette dernière expression se présente la remarque que voici : on a identiquement

$$S = 3S_3 + R\left(\frac{S}{3}\right).$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{S}{6} &= \frac{S_3}{2} + \frac{1}{6} R\left(\frac{S}{3}\right) \\ &= E\left(\frac{S_3}{2}\right) + \frac{1}{2} R\left(\frac{S_3}{2}\right) + \frac{1}{6} R\left(\frac{S}{3}\right). \end{aligned}$$

Or, les plus grandes valeurs respectives de $R\left(\frac{S_3}{2}\right)$ et de $R\left(\frac{S}{3}\right)$ sont 1 et 2; la plus grande valeur de l'ensemble des deux derniers termes est, par suite, $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$. Il en résulte que

$$S_6 = E\left(\frac{S_3}{2}\right).$$

On peut donc aussi écrire

$$(7 \text{ bis}) \quad M(z) = E\left(\frac{S_3}{2}\right).$$

Maintenant, pour une valeur donnée de z , l'inégalité (4) montre que l'on a

$$(8) \quad \begin{cases} m(u) = 0, & \text{si } 3z - S_3 \leq 0, \\ m(u) = 3z - S_3, & \text{si } 3z - S_3 > 0 \end{cases}$$

et

$$M(u) = E\left(\frac{S + 3z}{9}\right).$$

Ici encore, on peut faire la remarque suivante : on a identiquement

$$S + 3z = 3S_3 + R\left(\frac{S}{3}\right) + 3z;$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{S + 3z}{9} &= \frac{S_3 + z}{3} + \frac{1}{9} R\left(\frac{S}{3}\right) \\ &= E\left(\frac{S_3 + z}{3}\right) + \frac{1}{3} R\left(\frac{S_3 + z}{3}\right) + \frac{1}{9} R\left(\frac{S}{3}\right). \end{aligned}$$

Chacun des restes ayant pour plus grande valeur 2, la plus grande valeur de l'ensemble des deux derniers termes est $\frac{2}{3} + \frac{2}{9} = \frac{8}{9}$, et l'on a

$$E\left(\frac{S + 3z}{9}\right) = E\left(\frac{S_3 + z}{3}\right);$$

par suite,

$$(9) \quad M(u) = E\left(\frac{S_3 + z}{3}\right).$$

Voyons maintenant quelles sont les limites de $m(u)$ et de $M(u)$ quand on donne à z toutes les valeurs de $m(z)$ à $M(z)$.

La formule (8) donne immédiatement, pour les valeurs (6) et (7 bis) de (z) ,

$$(10) \quad m^2(u) = 0$$

et

$$Mm(u) = 3E\left(\frac{S_2}{2}\right) - S_3$$

ou, en représentant par ϵ le reste $R\left(\frac{S_2}{2}\right)$, égal à 0 ou 1,

$$(11) \quad Mm(u) = S_6 - \epsilon.$$

La formule (9) donne de même avec (6) et (7),

$$(12) \quad mM(u) = E\left(\frac{S_3}{3}\right)$$

et

$$(13) \quad M^2(u) = E\left(\frac{S_3 + S_6}{3}\right).$$

Cherchons enfin quelles sont les valeurs limites de ν pour des valeurs données de z et u . L'inégalité (3) donne immédiatement

$$(14) \quad \begin{cases} m(\nu) = 0, & \text{si } z - u \leq 0, \\ m(\nu) = \frac{1}{2}(z - u), & \text{si } z - u > 0, \end{cases}$$

et

$$(15) \quad M(\nu) = S_3 - 3u + z.$$

En vue d'alléger les écritures ultérieures, nous poserons

$$(16) \quad m(u) = a, \quad M(u) = b,$$

a et b étant donnés par les formules (8) et (9), puis

$$(17) \quad \begin{cases} E\left(\frac{S_1 - \varepsilon}{3}\right) = p, & E\left(\frac{S_2}{3}\right) = p', & E\left(\frac{S_3 + S_6}{3}\right) = p'', \\ R\left(\frac{S_1 - \varepsilon}{3}\right) = r, & R\left(\frac{S_2}{3}\right) = r', & R\left(\frac{S_3 + S_6}{3}\right) = r''. \end{cases}$$

On peut remarquer d'ailleurs que p'' est égal soit à $p + p'$, soit à $p + p' + 1$.

Nombre n des solutions pour une valeur donnée de z . — Le nombre des solutions correspondant à des valeurs données de u et de z est

$$M(\nu) - m(\nu) + 1.$$

Donc, en étendant le signe $\sum$ aux diverses valeurs de u compatibles avec la valeur de z choisie, c'est-à-dire variant de a à b , on a

$$n = \sum [M(\nu) + 1] - \sum m(\nu).$$

Le nombre des termes de cette somme étant égal à $b - a + 1$, on a, d'après (15),

$$\begin{aligned} \sum [M(\nu) + 1] &= \sum (S_3 + z + 1 - 3u) \\ &= (b - a + 1)(S_3 + z + 1) - 3 \sum_a^b u \\ &= (b - a + 1)(S_3 + z + 1) - 3 \frac{(b - a + 1)(a + b)}{2}, \end{aligned}$$

D'après la formule (14), on a de même

$$\begin{aligned}\sum m(v) &= 4[1 + 2 + \dots + (z - a)] \\ &= 2(z - a)(z - a + 1).\end{aligned}$$

Par suite,

$$n = (b - a + 1)(S_3 + z + 1) - 3 \frac{(b - a + 1)(a + b)}{2} - 2(z - a)(z - a + 1),$$

qu'on peut écrire

$$n = (b + 1) \frac{2(S_3 + 1) + 2z - 3b}{2} + a \frac{6z - (2S_3 + 1) - a}{2} - 2z(z + 1).$$

Or, la formule (8), rapprochée de (16), donne

$$a = 3z - S_3,$$

d'où

$$6z - (2S_3 + 1) - a = a - 1.$$

De même (9) rapprochée de (16) donne

$$b = E \left(\frac{S_3 + z}{3} \right).$$

Dès lors, si l'on pose

$$(18) \quad \rho = R \left(\frac{S_3 + z}{3} \right),$$

on peut écrire

$$b = \frac{S_3 + z - \rho}{3},$$

d'où

$$2(S_3 + 1) + 2z - 3b = 3b + 2(\rho + 1).$$

Finalement, il vient

$$(19) \quad n = \frac{(b + 1)[3b + 2(\rho + 1)]}{2} + \frac{a(a - 1)}{2} - 2z(z + 1).$$

Dans le cas où l'on n'a recours qu'à la monnaie courante, c'est-à-dire où l'on exclut les pièces de 0^r, 20, il faut faire $z = 0$. La formule (8) montre qu'on a alors $a = 0$, et les formules (9) et (18), rapprochées de (17), $b = p'$, $\rho = r'$.

Par suite, la formule (19) devient dans ce cas

$$(19') \quad n = \frac{(p' + 1)[3p' + 2(r' + 1)]}{2}.$$

En particulier pour $S = 100$, auquel cas on a $p' = 11$, $r' = 0$, cette formule donne

$$n = \frac{12 \times 35}{2} = 210.$$

Nombre total N des solutions. — Il s'agit de faire la somme de tous les nombres n donnés par la formule (19) lorsque z varie de sa limite inférieure 0 à sa limite supérieure S_6 .

Si donc on pose, en étendant le signe $\sum$ à ces limites,

$$B = \sum \frac{(b+1)[3b+2(p+1)]}{2},$$

$$A = \sum \frac{\alpha(\alpha-1)}{2},$$

$$Z = \sum 2z(z+1),$$

on a

$$N = B + A - Z.$$

Pour Z , on a immédiatement, en vertu d'une formule bien connue,

$$(20) \quad Z = \frac{2S_6(S_6+1)(S_6+2)}{3}.$$

Dans A , les valeurs de α non nulles forment, d'après (8), une progression géométrique de raison 3 dont le plus grand terme, d'après (11) rapprochée de (17), est $3p+r$, et, par suite, le plus petit terme r . Conséquemment

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \sum_0^p (3i+r)(3i+r-1) \\ &= \frac{1}{2} \left[9 \sum_0^p i^2 + 3(2r-1) \sum_0^p i + (p+1)r(r-1) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{3p(p+1)(2p+1)}{2} + 3(2r-1) \frac{p(p+1)}{2} + (p+1)r(r-1) \right], \end{aligned}$$

ou, après réductions,

$$(21) \quad A = \frac{p+1}{2} [3p(p+r) + r(r-1)].$$

Pour B la sommation est plus délicate. Remarquons d'abord que les limites b ont, d'après (9), trois à trois la même valeur, ces valeurs croissant d'unité en unité, et que les restes ρ , d'après (18), reprennent périodiquement les valeurs 0, 1, 2.

La plus petite valeur de b , d'après (12) rapprochée de (17), est

$$m(b) = p',$$

et sa plus grande valeur, d'après (13) rapprochée de (17),

$$M(b) = p''.$$

Les trois termes correspondant à une certaine valeur de b et aux valeurs 0, 1, 2 de ρ ont une somme donnée par

$$\frac{1}{2}(b+1)(9b+12) = \frac{3}{2}(b+1)(3b+4).$$

Par conséquent, si l'on ajoute tous les groupes de tels trois termes depuis $b = p'$ jusqu'à $b = p''$, on a

$$T = \frac{3}{2} \sum_{p'}^{p''} (b+1)(b+1)(3b+4),$$

qui peut s'écrire

$$T = \frac{3}{2} \sum_0^{p''-p'} (i+p'+1)(3i+3p'+4).$$

Cette sommation, effectuée comme celle qui a conduit à (21), donne, toutes réductions effectuées,

$$(22) \quad T = \frac{3(p''-p'+1)}{2} [(p''-p')(p''+2p'+4) + (p'+1)(3p'+4)].$$

Mais B ne comprend tous les termes qui ont été sommés dans T que si la première valeur de ρ est 0 et la dernière 2. Or, toutes les combinaisons des valeurs 0, 1 et 2 de ρ peuvent se présenter pour ces deux limites. Il faut, dès lors, suivant la valeur de ces limites, retrancher certains termes de T. C'est ce qui va maintenant être examiné.

D'après (18), la première valeur de ρ , correspond à $z = 0$, est donnée par

$$\rho = R \left(\frac{S_2}{3} \right),$$

ou, en vertu de (17),

$$\rho = r'.$$

Si $r' = 0$, il n'y a aucun terme à retrancher parmi les premiers de ceux qui ont été sommés dans T.

Si $r' = 1$, il faut en retrancher le terme

$$\frac{(p' + 1)(3p' + 2)}{2},$$

et si $r' = 2$, les deux termes

$$\frac{(p' + 1)(3p' + 2)}{2} + \frac{(p' + 1)(3p' + 4)}{2} = (p' + 1)(3p' + 3).$$

Ces trois cas peuvent se résumer dans cette formule unique : que r' soit égal à 0, 1 ou 2, il faut de T retrancher

$$(23) \quad T' = \frac{r'(p' + 1)(3p' + r' + 1)}{2}.$$

De même, la dernière valeur de ρ , correspondant à $z = S_6$, est donnée, toujours d'après (18), par

$$\rho = R \left(\frac{S_3 + S_6}{3} \right),$$

ou, en vertu de (17),

$$\rho = r''.$$

Si $r'' = 2$, il n'y a aucun terme à retrancher parmi les derniers de ceux qui ont été sommés dans T.

Si $r'' = 1$, il faut en retrancher le terme

$$\frac{(p'' + 1)(3p'' + 6)}{2},$$

et si $r'' = 0$, les deux termes

$$\frac{(p'' + 1)(3p'' + 4)}{2} + \frac{(p'' + 1)(3p'' + 6)}{2} = (p'' + 1)(3p'' + 5).$$

Ces trois cas peuvent se résumer dans cette formule unique : que r'' soit égal à 0, 1 ou 2, il faut de T retrancher

$$(24) \quad T'' = \frac{(2 - r'')(p'' + 1)(3p'' + r'' + 5)}{2},$$

Comme on a, dans tous les cas,

$$B = T - T' - T'',$$

on voit, en se reportant à l'expression de N donnée plus haut, que l'on a finalement

$$(25) \quad N = A + T - (Z + T' + T''),$$

les quantités figurant dans le second membre étant données respectivement par les formules (21), (22), (20), (23) et (24).

Prenons, par exemple, $S = 100$. Nous avons alors

$$\begin{aligned} S_1 &= 16, & S_2 &= 33, & z &= 1, \\ p &= 5, & p' &= 11, & p'' &= 16, \\ r &= 0, & r' &= 0, & r'' &= 1, \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} A &= 3 \times 15 \times 5 = 225, \\ T &= 9(5 \times 42 + 12 \times 37) = 5886, \\ Z &= 32 \times 17 \times 6 = 3264, \\ T' &= 0, \\ T'' &= 17 \times 27 = 459, \end{aligned}$$

d'où

$$N = 6111 - 3723 = 2388.$$

Autre méthode pour le cas où $z = 0$. — Voici une autre méthode qui, dans le cas général, conduit à des calculs plus pénibles que la précédente, mais qui, par contre, lorsqu'on se borne à la monnaie courante en excluant les pièces de 0^{fr}, 20, c'est-à-dire lorsqu'on suppose $z = 0$, conduit plus rapidement à la formule (19').

Faisant $z = 0$ dans les équations initiales, on en déduit, par addition et soustraction

$$\begin{aligned} 6u + 3(v + y) &= 2(S - x), \\ 4u &= v - y. \end{aligned}$$

Il en résulte immédiatement que $v + y$ est multiple de 2, et $v - y$ multiple de 4. Posant donc

$$v + y = 2\tau, \quad v - y = 4\delta,$$

et éliminant u , on a l'équation

$$3\delta + 3\sigma = S - x.$$

$S - x$ devant, d'après cela, être positif et multiple de 3, les seules valeurs que l'on pourra donner à x seront 0, 3, 6, 9, ..., $3S_3$, S_3 représentant toujours $E\left(\frac{S}{3}\right)$. Prenons l'une de ces valeurs $3k$. L'équation s'écrira alors

$$\delta + \sigma = k.$$

Or, d'après la définition même de δ et σ , on doit avoir

$$4\delta \leq 2\sigma,$$

ou

$$2\delta \leq k - \delta,$$

c'est-à-dire

$$\delta \leq E\left(\frac{k}{3}\right) \quad \text{ou} \quad k_3.$$

Les solutions correspondant à une valeur de k sont donc données par $\delta = 0, 1, 2, \dots, k_3$. Elles sont au nombre de $k_3 + 1$, et l'on a pour le nombre cherché

$$n = \sum_{k=0}^{k=S_3} (k_3 + 1).$$

Les nombres k_3 ayant de trois en trois la même valeur, nous voyons, en utilisant les notations définies par (17), que

$$n = 3 \sum_1^{p'-1} i + \tau + S_3 + 1,$$

τ étant égal à p' , $2p'$ ou $3p'$ suivant que $r' = 0, 1$ ou 2 , ce qu'on peut exprimer en posant

$$\tau = (r' + 1)p'.$$

Remplaçant d'autre part S_3 par sa valeur $3p' + r'$, on a finale-

ment

$$\begin{aligned} n &= \frac{3p'(p'-1)}{2} + (r'+1)p' + 3p' + r' + 1, \\ &= \frac{p'}{2} (3p' + 2r' + 5) + r' + 1, \\ &= \frac{(p'+1)[3p' + 2(r'+1)]}{2}, \end{aligned}$$

ce qui est bien la formule (19').

**SUR UN INVARIANT D'UN SYSTÈME DE DEUX TRIANGLES
ET LA THÉORIE DES INTÉGRALES DOUBLES;**

Par M. LE ROUX.

1. Dans une Note récente relative à un problème d'inversion d'intégrale double, j'ai été amené à considérer une intégrale double de la forme

$$-\frac{1 \cdot 2}{4\pi^2} \iint \frac{F(u, v) du dv}{\left(1 - \frac{x}{u} - \frac{y}{v}\right)^3 u^2 v^2},$$

évaluée suivant une surface fermée.

Cette intégrale se rapproche par certaines propriétés de l'intégrale simple.

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(z) dz}{(z-x)^2}$$

qui donne la dérivée de $f(x)$.

Dans la présente Note je m'occupe seulement de la différentielle double

$$\frac{du dv}{\left(1 - \frac{x}{u} - \frac{y}{v}\right)^3 u^2 v^2}$$

qui devient

$$\frac{du dv}{(ux + vy + 1)^3}$$

pour le changement de u, v , en $\frac{-1}{u}$ et $\frac{-1}{v}$.

Cette différentielle est liée à un certain invariant projectif d'un système de deux triangles par une relation analogue à celle qui

existe entre la différentielle simple

$$\frac{dz}{(z-x)^2}$$

et le rapport anharmonique.

Considérons, en effet, dans le plan un système de deux triangles déterminés, le premier par ses sommets, le second par ses côtés. Soient x_i, y_i, z_i ($i = 1, 2, 3$) les coordonnées ponctuelles des sommets du premier, u_i, v_i, w_i ($i = 1, 2, 3$) les coordonnées tangentielles des côtés du second.

Si l'on pose

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = D, \quad \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = \Delta,$$

le rapport

$$\rho = \frac{D \Delta}{(u_1 x_1 + v_1 y_1 + w_1 z_1)(u_2 x_2 + v_2 y_2 + w_2 z_2)(u_3 x_3 + v_3 y_3 + w_3 z_3)}$$

constitue évidemment un invariant projectif absolu de la figure formée par les deux triangles, et peut être considéré dans un certain sens comme une généralisation du rapport anharmonique de deux couples de points.

Supposons que, d'une part, les sommets du premier et, d'autre part, les côtés du second soient des éléments infiniment voisins. Le numérateur de ρ devient alors le produit de deux différentielles doubles (*différentielles binaires*, suivant l'expression de M. Méray).

En introduisant pour chaque série de variables deux systèmes d'accroissements infiniment petits, nous désignerons par

$$x, y, z; \quad x + d_1 x, y + d_1 y, z + d_1 z; \quad x + d_2 x, y + d_2 y, z + d_2 z$$

les éléments du premier triangle, et par

$$u, v, w; \quad u + d_1 u, v + d_1 v, w + d_1 w; \quad u + d_2 u, v + d_2 v, w + d_2 w$$

les éléments du second. Nous poserons, en outre,

$$\begin{vmatrix} d_1 x & d_1 y \\ d_2 x & d_2 y \end{vmatrix} = d(x, y);$$

le rapport ρ prend alors la forme

$$\frac{[x d(y, z) + y d(z, x) + z d(x, y)] [u d(v, w) + v d(w, u) + w d(u, v)]}{(ux + vy + wz)^3}.$$

En particulier pour $z = 1, w = 1$, cette expression devient

$$\frac{d(x, y) d(u, v)}{(ux + vy + 1)^3}.$$

Effectuons, sur les variables x, y , une transformation homographique quelconque, et sur les variables u, v la transformation réciproque. En désignant par X, Y, U, V les nouvelles coordonnées, nous aurons, d'après ce qui précède,

$$(1) \quad \frac{d(x, y) d(u, v)}{(ux + vy + 1)^3} = \frac{d(X, Y) d(U, V)}{(UX + VY + 1)^3},$$

ou bien

$$(2) \quad \frac{d(u, v)}{(ux + vy + 1)^3} = \frac{d(X, Y)}{d(x, y)} \frac{d(U, V)}{(UX + VY + 1)^3}.$$

Cette relation est analogue à la suivante :

$$\frac{dz}{(z - x)^2} = \frac{dX}{dx} \frac{dZ}{(Z - X)^2}$$

que l'on déduit de la considération du rapport anharmonique.

L'équation (1), qu'il est facile de vérifier directement, permet de calculer l'un des déterminants fonctionnels

$$\frac{d(u, v)}{d(U, V)}, \quad \frac{d(x, y)}{d(X, Y)}$$

quand on connaît l'autre.

Nous avons, par exemple,

$$\frac{d(u, v)}{d(U, V)} = \frac{(ux + vy + 1)^3}{(UX + VY + 1)^3} \frac{d(X, Y)}{d(x, y)}.$$

Si nous remplaçons, dans le second membre, x, y par les coordonnées x_0, y_0 de la nouvelle origine, nous trouvons

$$\frac{d(u, v)}{d(U, V)} = (ux_0 + vy_0 + 1)^3 \left| \frac{d(X, Y)}{d(x, y)} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}.$$

2. L'intégrale double ⁽¹⁾

$$1.2 \iint \frac{d(x, y)}{(ux + vy + 1)^3},$$

étendue à l'aire d'un triangle non coupé par la droite

$$ux + vy + 1 = 0,$$

est l'analogue de l'intégrale simple $\int \frac{dz}{(z-x)^2}$. On peut l'obtenir sous une forme simple qui se prête admirablement à l'application des formules de M. Poincaré pour les résidus d'intégrales doubles. Soient

$$(D_1) \quad a_1 x + b_1 y + c_1 = 0,$$

$$(D_2) \quad a_2 x + b_2 y + c_2 = 0,$$

$$(D_3) \quad a_3 x + b_3 y + c_3 = 0$$

les côtés du triangle. L'ordre de ces côtés donne le sens du parcours et définit le signe de l'intégrale.

Nous posons

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

et nous désignons par A_i, B_i, C_i les coefficients des éléments a_i, b_i, c_i dans ce déterminant. Soit, en outre, Δ_i le déterminant obtenu en remplaçant dans Δ les éléments de la $i^{\text{ème}}$ ligne par $u, v, 1$:

$$\Delta_i = A_i u + B_i v + C_i.$$

Effectuons la transformation homographique

$$\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{ux + vy + 1} = X,$$

$$\frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{ux + vy + 1} = Y.$$

⁽¹⁾ La notation $d(x, y)$ pour la différentielle présente des avantages sur lesquels il est inutile d'insister. Voir les Mémoires de M. Méray (*Annales de l'École Normale*, 1899).

Le déterminant fonctionnel $\frac{d(x, y)}{d(X, Y)}$ est égal à

$$\frac{(ux + vy + 1)^3}{\Delta_3}.$$

On a, par conséquent,

$$\frac{d(x, y)}{(ux + vy + 1)^3} = \frac{d(X, Y)}{\Delta_3}$$

ou bien, en intégrant,

$$(3) \quad \iint \frac{d(x, y)}{(ux + vy + 1)^3} = \frac{1}{\Delta_3} \iint d(X, Y).$$

Au triangle proposé correspond dans le nouveau système le triangle déterminé par les axes de coordonnées et par la droite D_3 dont l'équation est, sous la nouvelle forme,

$$\Delta - \Delta_1 X - \Delta_2 Y = 0.$$

De plus les aires intérieures des deux triangles se correspondent.

On a donc

$$\iint d(X, Y) = \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{\Delta_1 \Delta_2},$$

et, par suite,

$$\iint \frac{d(x, y)}{(ux + vy + 1)^3} = \frac{\Delta^2}{\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3}.$$

C'est le résultat que nous voulions obtenir.

L'équation (3) montre que l'intégrale double

$$\iint \frac{d(x, y)}{(ux + vy + 1)^3}$$

peut être considérée comme une transformée homographique de l'aire.

**NOUVELLE DÉMONSTRATION
D'UN THÉORÈME SUR LES FONCTIONS DISCONTINUES;**

Par M. RENÉ BAIRE.

J'ai démontré dans ma Thèse (*Sur les fonctions de variables réelles*, Chapitre II; *Annali di Matematica*, 1899) que, pour qu'une fonction d'une variable soit développable en série de fonctions continues, il faut et il suffit qu'elle soit ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait. M. Lebesgue a fait voir (*Comptes rendus*, 27 mars 1899) qu'on pouvait ramener le cas de n variables à celui d'une seule, et étendre ainsi à ces fonctions l'énoncé précédent. Je me propose d'exposer ici une nouvelle démonstration du fait que la condition est suffisante; cette démonstration est plus courte et plus synthétique que celle de ma Thèse (Chap. II, Sect. III), où j'employais un procédé de récurrence; elle a de plus l'avantage de s'appliquer directement au cas de n variables.

1. Il s'agit de démontrer le théorème suivant :

Si une fonction $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait, il existe une suite de fonctions continues $f_1, f_2, \dots, f_p, \dots$, qui a pour limite f .

Je supposerai la fonction f définie dans le domaine E (cube à n dimensions) :

$$0 \leq x_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Étant donné un entier quelconque p , j'appellerai *points principaux d'ordre p* les points dont les n coordonnées sont de la forme $\frac{\alpha_i}{2^p}$. On peut considérer E comme formé par la réunion de cubes Δ_p de côté $\frac{1}{2^p}$ et dont les sommets sont des points principaux d'ordre p .

J'appellerai *domaine principal d'ordre p* tout domaine D_p de la forme

$$\frac{\alpha_i - 1}{2^p} \leq x_i \leq \frac{\alpha_i + 1}{2^p}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

et je dirai que ce domaine a pour *centre* le point principal de

coordonnées $\frac{\alpha_i}{2^p}$. (Le domaine D_p devra être réduit, dans le cas où un des nombres α_i est 0 ou 2^p , à sa portion contenue dans E.)

Tout point M de E appartient à un certain nombre de domaines D_p ; j'appelle *points principaux d'ordre p associés à M* les centres de ces domaines; ces points sont aussi les sommets des cubes Δ_p qui contiennent M. (Dans le cas général, où aucune des coordonnées de M n'est de la forme $\frac{\alpha}{2^p}$, M appartient à *un seul* cube Δ_p ; il y a donc 2^n points principaux d'ordre p associés à M.)

Cela posé, je vais démontrer que le problème de la construction des fonctions continues $f_1, f_2, \dots, f_p, \dots$, tendant vers f , peut être complètement ramené au suivant :

I. *Faire correspondre à chaque domaine principal D un nombre $\varphi(D)$ de manière à réaliser la condition A qui suit :*

A. *Étant donné un point quelconque M, si petit que soit ϵ , il existe une sphère Σ de centre M telle que, à chaque domaine principal D contenu tout entier dans Σ et contenant M, corresponde un nombre $\varphi(D)$ différent de $f(M)$ de moins de ϵ .*

Supposons en effet le problème I résolu. Nous construirons f_p de la manière suivante : En chaque point principal d'ordre p, H, cette fonction aura pour valeur le nombre $\varphi(D)$ correspondant au domaine principal D d'ordre p dont H est le centre. Nous achèverons la définition de f_p en l'assujettissant à être continue, et à avoir, en chaque point M, une valeur comprise entre la plus grande et la plus petite de ses valeurs aux points principaux d'ordre p associés à M. Ces deux conditions seront réalisées si, par exemple, on prend pour f_p la fonction qui, dans chaque cube Δ_p , est *linéaire par rapport à chacune des variables*.

Je dis que, dans ces conditions, $f_p(M)$ tend vers $f(M)$ quand p croît indéfiniment. En effet, donnons-nous un nombre positif ϵ , et déterminons une sphère Σ d'après la condition A. Dès que p dépasse une certaine valeur, les domaines principaux d'ordre p qui contiennent M sont contenus tout entiers dans Σ ; par conséquent les valeurs de f_p aux points principaux d'ordre p associés à M diffèrent de $f(M)$ de moins de ϵ ; il en est de même de $f_p(M)$,

qui est compris entre la plus grande et la plus petite de ces valeurs; donc $f_p(M)$ a pour limite $f(M)$.

2. Tout revient donc à résoudre le problème I.

Donnons-nous une suite décroissante de nombres positifs tendant vers 0, par exemple

$$(1) \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{8}, \quad \dots, \quad \frac{1}{2^\mu}, \quad \dots$$

Soit D un domaine principal; nous allons définir $\varphi(D)$.

Soit σ_1 le plus grand nombre de (1) tel qu'il existe dans D des points où l'oscillation par rapport à E , $\varpi(f, E)$, est $\geq \sigma_1$; soit P_1 l'ensemble des points de D où l'on a $\varpi(f, E) \geq \sigma_1$.

Si P_1^Ω existe et si la fonction n'est pas continue sur P_1^Ω , soit σ_2 le plus grand nombre de (1) tel qu'il existe des points où l'oscillation par rapport à P_1^Ω , $\varpi(f, P_1^\Omega)$, est $\geq \sigma_2$; soit P_2 l'ensemble de ces points.

On définit ainsi des ensembles fermés, tous contenus dans D :

$$(2) \quad P_1, P_2, \dots, P_n, \dots, P_\omega, \dots, P_{2\omega}, \dots, P_\alpha, \dots,$$

et des nombres dont chacun fait partie de la suite (1) ou est nul :

$$(3) \quad \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \dots, \sigma_\omega, \dots, \sigma_{2\omega}, \dots, \sigma_\alpha, \dots,$$

d'après la loi suivante :

Si α est de première espèce, σ_α et P_α s'obtiennent de $P_{\alpha-1}$, comme σ_2 et P_2 de P_1 . Si α est de deuxième espèce, P_α est l'ensemble commun à tous les $P_{\alpha'}$, pour lesquels $\alpha' < \alpha$; de plus, σ_α est la limite inférieure des nombres $\sigma_{\alpha'}$ pour lesquels $\alpha' < \alpha$. (Il est évident que la condition $\beta > \alpha$ entraîne $P_\beta \subseteq P_\alpha$, et $\sigma_\beta \leq \sigma_\alpha$.)

J'ai démontré (Thèse, § 47) qu'étant donnée une suite d'ensembles tels que (2), il y a un nombre α tel que $P_\alpha = P_{\alpha+1}$. (La démonstration, faite pour le cas des ensembles linéaires, s'étend sans difficulté au cas d'ensembles à n dimensions.) Je dis qu'on doit avoir $P_\alpha = 0$; si, en effet, P_α existait effectivement, on aurait $P_\alpha = P_\alpha^\Omega = P_{\alpha+1}$; il existerait un nombre positif $\sigma_{\alpha+1}$ tel que, sur l'ensemble parfait P_α^Ω , l'oscillation en chaque point par rapport à P_α^Ω serait $\geq \sigma_{\alpha+1}$; la fonction serait totalement discontinue sur cet ensemble, contrairement à l'hypothèse. Il résulte de là que, pour un

certain nombre β , ou bien P_β est dénombrable ($P_\beta^\Omega = P_{\beta+1} = \dots = 0$), ou bien P_β^Ω existe, mais la fonction est continue sur cet ensemble ($P_{\beta+1} = \dots = 0$).

Dans le premier cas, il existe un nombre γ tel que P_β^γ se compose d'un nombre fini de points; on prendra pour $\varphi(D)$ une valeur quelconque comprise entre les valeurs extrêmes de la fonction sur P_β^γ .

Dans le second cas, on prendra pour $\varphi(D)$ une valeur comprise entre les valeurs extrêmes de la fonction sur P_β^Ω .

Ainsi se trouvent définis les nombres $\varphi(D)$ et, par suite, les fonctions continues $f_1, f_2, \dots, f_p, \dots$. Il reste à montrer que la condition A est réalisée.

3. Soit M un point quelconque de E.

Soit τ_1 le plus grand nombre de (1), tel que l'oscillation en M par rapport à E, $\omega(f, E, M)$, est $\geq \tau_1$; soit Q_1 l'ensemble des points de E où l'on a $\omega(f, E) \geq \tau_1$.

Si Q_1^Ω existe et contient M, et si la fonction n'est pas continue en M par rapport à Q_1^Ω , soit τ_2 le plus grand nombre de (1), tel que l'oscillation en M par rapport à Q_1^Ω , $\omega(f, Q_1^\Omega, M)$, est $\geq \tau_2$; soit Q_2 l'ensemble des points de Q_1^Ω où l'on a $\omega(f, Q_1^\Omega) \geq \tau_2$.

On déduira τ_α et Q_α de $Q_{\alpha-1}$, quand α est de première espèce, comme on a déduit τ_2 et Q_2 de Q_1 . Quand α est de deuxième espèce, Q_α sera l'ensemble commun aux ensembles $Q_{\alpha'}$, tels que $\alpha' < \alpha$, et τ_α sera la limite inférieure des nombres $\tau_{\alpha'}$ pour lesquels $\alpha' < \alpha$.

On définit ainsi des ensembles fermés contenant tous le point M :

$$(4) \quad Q_1, Q_2, \dots, Q_n, \dots, Q_\omega, \dots, Q_{1\omega}, \dots, Q_\alpha, \dots$$

et des nombres correspondant à ces ensembles :

$$(5) \quad \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, \dots, \tau_\omega, \dots, \tau_{1\omega}, \dots, \tau_\alpha, \dots$$

De même que précédemment, on reconnaît que les ensembles Q sont nuls à partir d'un certain indice. Il existe donc un nombre η tel que, ou bien Q_η^Ω n'existe pas, ou bien Q_η^Ω existe et ne contient pas M, ou bien Q_η^Ω contient M, la fonction étant continue en M par rapport à Q_η^Ω .

Chacun des nombres de (5) appartient à (1) (sauf peut-être le

Donc on a $\sigma_1 = \tau_1$ et, par suite, dans D , P_1 coïncide avec Q_1 . Démontrons, par voie de récurrence, qu'on a $P_\alpha = Q_\alpha$ (dans D), si $\alpha \leq \alpha_h$; il suffit d'établir la proposition quand α est de première espèce, si l'on se reporte à la définition de P_α et Q_α quand α est de deuxième espèce.

Supposons donc α de première espèce et distinguons deux cas :

1° α n'est pas l'indice du premier terme d'un des groupes (6); nous admettons qu'on a $\sigma_{\alpha-1} = \tau_{\alpha-1}$ et $P_{\alpha-1} = Q_{\alpha-1}$; d'après l'hypothèse faite, on a $\tau_\alpha = \tau_{\alpha-1}$, c'est-à-dire qu'au point M , l'oscillation par rapport à $P_{\alpha-1}^\Omega = Q_{\alpha-1}^\Omega$ est $\geq \tau_\alpha$; donc σ_α , qui ne peut surpasser $\sigma_{\alpha-1} = \tau_{\alpha-1} = \tau_\alpha$, est identique à τ_α ; donc P_α est, dans D , identique à Q_α .

2° α est l'indice du premier terme d'un des groupes (6), soit $\alpha_{\delta+1}$ ($\delta < h$); nous admettons qu'on a $P_{\alpha_\delta} = Q_{\alpha_\delta}$; sur l'ensemble $Q_{\alpha_\delta}^\Omega$, l'oscillation au point M est supérieure ou égale à $\lambda_{\delta+1}$; comme D ne contient aucun point de $R_{\delta+1}$, ensemble des points où $\varpi(f, Q_{\alpha_\delta}^\Omega) \geq \lambda'_{\delta+1}$, on a $\sigma_{\alpha_{\delta+1}} = \lambda_{\delta+1} = \tau_{\alpha_{\delta+1}}$, et, par suite, $P_{\alpha_{\delta+1}} = Q_{\alpha_{\delta+1}}$.

Cela posé, je vais établir que la condition A est réalisée pour tout point M . Distinguons deux cas :

1° Pour le point M considéré, le nombre des groupes (6) est fini, soit k ; on a $\alpha_k = \eta$; l'ensemble Q_η existe, mais on a $Q_{\eta+1} = 0$. D'après ce qu'on a vu plus haut, ce cas peut se subdiviser en deux autres :

a. Q_η^Ω n'existe pas, ou bien existe, mais ne contient pas M ; M fait partie d'un certain ensemble Q_η^γ sans faire partie de $Q_{\eta+1}^\gamma$: c'est un point *isolé* de Q_η^γ . Déterminons une sphère Σ de centre M ne contenant aucun point de Q_η^γ autre que M , et ne contenant aucun point de $R_1, R_2, \dots, R_k$. Si D est un domaine contenant M et contenu dans Σ , on a, pour ce domaine, $P_\eta = Q_\eta$; d'où $P_\eta^\gamma = Q_\eta^\gamma = M$ et $P_{\eta+1}^\gamma = 0$; donc, d'après la définition de $\varphi(D)$, on a $\varphi(D) = f(M)$.

b. M fait partie de Q_η^Ω , et la fonction est continue en M sur Q_η^Ω . Déterminons une sphère Σ ne contenant aucun point de $R_1, R_2, \dots, R_k$, et telle que l'oscillation de f sur la portion de Q_η^Ω contenue dans cette sphère soit $< \epsilon$. Si D est contenu dans Σ et

contient M , on a $P_\eta^\Omega = Q_\eta^\Omega$; l'ensemble P_β^γ ou P_β^Ω qui intervient dans la définition de $\varphi(D)$ est certainement contenu dans Q_η^Ω ; donc $\varphi(D)$ diffère de $f(M)$ de moins de ε .

2° Les groupes (6) sont en nombre infini; ε étant donné, on peut trouver h tel que λ_h soit $< \varepsilon$. Sur l'ensemble $Q_{\alpha_h}^\Omega$, l'oscillation en M est $< \varepsilon$; on peut donc trouver une sphère Σ ne contenant aucun point de $R_1, R_2, \dots, R_h$ et telle que l'oscillation de f sur la portion de $Q_{\alpha_h}^\Omega$ qui y est contenue soit $< \varepsilon$. De même que dans le cas b , l'ensemble P_β^γ ou P_β^Ω , qui sert à définir $\varphi(D)$, est contenu dans $Q_{\alpha_h}^\Omega$, et $\varphi(D)$ diffère de $f(M)$ de moins de ε .

Ainsi, dans chacun des trois cas $a, b, 2^\circ$, la condition A est réalisée; le théorème est donc établi.

4. On conçoit que le procédé de définition des nombres $\varphi(D)$, donné au § 2 pour le cas le plus général, pourrait recevoir des simplifications dans certains cas particuliers; je vais indiquer un cas remarquable où la solution peut être obtenue d'une manière extrêmement simple. J'ai démontré, dans ma Thèse, que les fonctions *semi-continues* satisfont à la condition d'être ponctuellement discontinues sur tout ensemble parfait, et j'en ai déduit la possibilité, pour ces fonctions, d'être développées en séries de fonctions continues; je vais établir cette proposition d'une manière beaucoup plus directe.

Supposons que f soit *semi-continue supérieurement*. Je fais correspondre à chaque domaine D un nombre $\varphi(D)$ égal au *maximum* de la fonction dans ce domaine : je dis que la condition A est ainsi réalisée. En effet, soit M un point; on peut déterminer une sphère Σ de centre M , dans laquelle on a, en tout point M' , $f(M') < f(M) + \varepsilon$. Si D est contenu dans Σ et contient M , le maximum de f dans D , c'est-à-dire $\varphi(D)$, est compris entre $f(M)$ et $f(M) + \varepsilon$. Le théorème est ainsi démontré.

Il est remarquable que cette proposition résulte ainsi, d'une manière presque immédiate, de la notion de semi-continuité : la démonstration ne nécessite pas l'emploi des résultats de la théorie des ensembles.

SUR LA TORSION D'UNE COURBE DÉFINIE PAR SON PLAN OSCULATEUR;

Par M. A. DEMOULIN.

1.

Soient $y_1, \dots, y_n$, n fonctions d'une variable x . Désignons par $W(y_1, \dots, y_n)$ leur wronskien, c'est-à-dire le déterminant

$$(1) \quad \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \dots & y'_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Le signe W jouit d'une remarquable propriété qui se traduit par la formule

$$(A) \quad W(\lambda y_1, \dots, \lambda y_n) = \lambda^n W(y_1, \dots, y_n),$$

où l'on désigne par λ une fonction arbitraire de x . En particulier, si l'on fait $\lambda = \frac{1}{y_1}$, il viendra

$$(A') \quad W(y_1, \dots, y_n) = y_1^n \left(D \frac{y_2}{y_1}, \dots, D \frac{y_n}{y_1} \right).$$

Cette notation des wronskiens et la formule (A) permettent de présenter de la manière suivante une partie des résultats contenus dans le n° 376 des *Leçons* de M. Darboux (II^e Partie, p. 101 et suiv.) :

Soient $z_1, \dots, z_n$ les mineurs du déterminant (1) par rapport aux éléments de la dernière ligne.

On a

$$(B) \quad W(z_1, \dots, z_n) = [W(y_1, \dots, y_n)]^{n-1},$$

puis

$$(C) \quad y_i = (-1)^{i-1} \lambda W(z_1, \dots, z_{i-1}, z_{i+1}, \dots, z_n) \quad (i = 1, \dots, n)$$

avec

$$(D) \quad \lambda = \frac{1}{[W(y_1, \dots, y_n)]^{n-2}}.$$

II.

Les formules qui précèdent trouvent une application immédiate dans la recherche de la torsion d'une courbe définie par son plan osculateur.

Soient x, y, z les coordonnées cartésiennes d'une courbe, ce sont des fonctions d'un paramètre t . La torsion en un point quelconque M de cette courbe a pour expression

$$\frac{1}{\tau} = \frac{W(x', y', z')}{W(x', y')^2 + W(y', z')^2 + W(z', x')^2},$$

les accents désignant des dérivées par rapport à t .

Soient x_1, x_2, x_3, x_4 les coordonnées homogènes du point M. Si on les introduit dans l'expression de $\frac{1}{\tau}$, il viendra, en faisant usage de la formule (A'),

$$\frac{1}{\tau} = \frac{x_4^2 W(x_1, x_2, x_3, x_4)}{W(x_1, x_2, x_4)^2 + W(x_2, x_3, x_4)^2 + W(x_3, x_1, x_4)^2}.$$

Soit maintenant

$$(\omega) \quad y_1 x_1 + y_2 x_2 + y_3 x_3 + y_4 x_4 = 0$$

l'équation du plan osculateur en M; y_1, y_2, y_3, y_4 sont des fonctions connues de t . Les coordonnées du point M vérifient l'équation (ω) et les deux suivantes

$$(\omega') \quad y_1' x_1 + y_2' x_2 + y_3' x_3 + y_4' x_4 = 0,$$

$$(\omega'') \quad y_1'' x_1 + y_2'' x_2 + y_3'' x_3 + y_4'' x_4 = 0.$$

Ces trois équations montrent que x_1, x_2, x_3, x_4 sont proportionnelles aux mineurs du wronskien de y_1, y_2, y_3, y_4 par rapport aux éléments de la dernière ligne. Si on les prend égales à ces mineurs, c'est-à-dire (d'après les notations adoptées au paragraphe I) à z_1, z_2, z_3, z_4 , on pourra écrire

$$\frac{1}{\tau} = \frac{z_4^2 W(z_1, z_2, z_3, z_4)}{W(z_1, z_2, z_4)^2 + W(z_2, z_3, z_4)^2 + W(z_3, z_1, z_4)^2}.$$

Les formules (B), (C), (D) deviennent ici

$$W(z_1, z_2, z_3, z_4) = [W(y_1, y_2, y_3, y_4)]^2,$$

$$\begin{cases} y_1 = \lambda W(z_2, z_3, z_4), \\ y_2 = -\lambda W(z_1, z_3, z_4), \\ y_3 = \lambda W(z_1, z_2, z_4), \\ y_4 = -\lambda W(z_1, z_2, z_3), \end{cases}$$

$$\lambda = \frac{1}{[W(y_1, y_2, y_3, y_4)]^2}.$$

D'ailleurs

$$z_4 = -W(y_1, y_2, y_3).$$

En tenant compte de ces différentes relations, on obtient l'expression définitive de $\frac{1}{\tau}$:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\overline{W(y_1, y_2, y_3)}^2}{(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) W(y_1, y_2, y_3, y_4)}.$$

Cette formule conduit à une relation très simple entre les torsions de deux courbes qui se correspondent dans une corrélation quelconque. (Voir *Comptes rendus*, séance du 29 janvier 1898.) Nous réservons pour une autre occasion la démonstration des propriétés énoncées dans cette Note; nous nous contenterons ici d'établir une relation entre les torsions de deux courbes polaires réciproques par rapport à une sphère. Soient Γ et Γ' les deux courbes en question et O le centre de la sphère directrice. Appelons τ et τ' les rayons de torsion de Γ et Γ' en deux points correspondants M et M' . Si l'on écrit l'équation du plan osculateur de Γ en M sous la forme

$$ux + vy + wz = 1,$$

les coordonnées cartésiennes du point M' seront (u', v', w') , pourvu qu'on prenne pour unité de longueur le rayon de la sphère directrice.

Si l'on fait dans la formule ci-dessus $y_1 = u$, $y_2 = v$, $y_3 = w$, $y_4 = -1$, on obtiendra l'expression de $\frac{1}{\tau}$:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\overline{W(u, v, w)}^2}{(u^2 + v^2 + w^2) W(u', v', w')}.$$

On a ensuite

$$\frac{1}{\tau'} = \frac{W(u', v', w')}{W(u', v')^2 + W(v', w')^2 + W(w', u')^2},$$

d'où, par multiplication,

$$\frac{1}{\tau\tau'} = \frac{W(u, v, w)^2}{W(u', v')^2 + W(v', w')^2 + W(w', u')^2} \cdot \frac{1}{u^2 + v^2 + w^2}.$$

Soit P' la projection orthogonale du point O sur le plan osculateur de Γ' en M' . On a

$$\overline{OP'}^2 = \frac{W(u, v, w)^2}{W(u', v')^2 + W(v', w')^2 + W(w', u')^2},$$

$$\overline{OM'}^2 = u^2 + v^2 + w^2.$$

Par suite

$$\tau\tau' = \frac{\overline{OM'}^2}{\overline{OP'}^2}.$$

Or, si l'on désigne par φ l'angle des plans osculateurs en M et M' ,

$$\frac{OP'}{OM'} = \cos \varphi$$

et il vient finalement

$$\tau\tau' \cos^2 \varphi = 1,$$

ou, en appelant a le rayon de la sphère directrice,

$$\tau\tau' \cos^2 \varphi = a^2.$$

Cette relation, jointe au théorème d'Enneper concernant la torsion des asymptotiques, conduit immédiatement à la relation

$$R_1 R_2 R'_1 R'_2 \cos^4 \varphi = a^4$$

qui lie les rayons de courbure principaux de deux surfaces polaires réciproques par rapport à une sphère. Nous avons fait connaître ces deux formules dans une Note insérée aux *Comptes rendus* (séance du 16 mai 1892). M. Rouquet les a retrouvées récemment (*Bulletin de l'Académie des Sciences, Inscriptions et Belles-Lettres de Toulouse*, tome I, année 1898).

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 4 AVRIL 1900.

PRÉSIDENCE DE M. CARVALLO.

Élections :

M. Renard, présenté par MM. Blutel et Laisant; M. Estienne, présenté par MM. Appell et Borel, sont élus, à l'unanimité, membres de la Société.

Communications :

M. Bricard : *Sur les surfaces ayant un système de lignes de courbure égales.*

M. Desaint : *Sur la généralisation d'un résultat dû à M. Borel.*

SÉANCE DU 18 AVRIL 1900.

PRÉSIDENCE DE M. TOUCHE.

Communication :

M. Touche : *Sur les forces extérieures.*

SÉANCE DU 3 MAI 1900.

PRÉSIDENCE DE M. MAURICE D'OCAGNE.

Communications :

M. André : *Sur un théorème de la Géométrie des coniques.*

M. Hoffbauer : *Sur une transformation des déterminants.*

M. Andoyer présente quelques observations à ce sujet.

M. Laisant : *Sur quelques propriétés des figures semblables dans le plan et dans l'espace.*

MM. Fontené et Bricard présentent quelques observations à ce sujet.

SÉANCE DU 16 MAI 1900.

PRÉSIDENCE DE M. TOUCHE.

Communications :

M. Demoulin : *Sur quelques formules nouvelles de la théorie des congruences rectilignes.*

M. Hadamard : *Sur l'équation de Laplace.*

SÉANCE DU 6 JUIN 1900.

PRÉSIDENCE DE M. BIOCHE.

Élection :

M. Firmin Comte, présenté par MM. Brocard et Laisant, est élu, à l'unanimité, membre de la Société.

Communications :

M. Touche : *Observations sur les principes de la Dynamique.*

M. Duporcq : *Sur les cercles circonscrits aux triangles circonscrits à une conique.*

M. Blutel : *Sur les surfaces admettant un système de courbes tétraédrales comme lignes asymptotiques.*

SÉANCE DU 20 JUIN 1900.

PRÉSIDENCE DE M. BIOCHE.

La Société, réunie en Assemblée générale, convoquée par délibération spéciale du Conseil, étudie le traité à intervenir avec le Conseil de l'Université de Paris. Le *quorum* n'étant pas atteint, l'Assemblée décide qu'il y a lieu de poursuivre la question et de convoquer une nouvelle Assemblée générale, dans le délai d'un mois.

M. PICARD adresse la Note suivante :

Sur quelques problèmes relatifs à l'équation $\Delta u = k^2 u$;

Dans une Note récente ⁽¹⁾ *Sur l'équilibre calorifique d'une surface fermée rayonnant au dehors* j'ai traité la question générale de l'équilibre calorifique d'une surface fermée avec rayonnement au dehors. Me plaçant ici à un point de vue purement analytique, je traiterai deux problèmes très particuliers se rapportant au même ordre d'idées et relatifs à l'équation $\Delta u = k^2 u$; le second concernera certaines solutions doublement périodiques de cette équation.

1. Le premier problème est relatif au cas d'une plaque indéfinie avec une seule source de chaleur à l'origine. L'équation aux dérivées partielles

$$\Delta u = u \quad (\text{nous faisons } k^2 = 1),$$

se réduit ici, par raison de symétrie, à l'équation différentielle ordinaire

$$(1) \quad \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - u = 0,$$

u ne dépendant que de la distance r à l'origine. D'après le problème physique, il s'agit d'avoir l'intégrale u de cette équation s'annulant à l'infini, et devenant infinie à l'origine, de telle sorte que l'intégrale

$$\int \frac{du}{dr} ds,$$

prise le long d'une circonférence de rayon infiniment petit autour de l'origine (intégrale correspondant au flux) ait une valeur donnée.

L'intégrale de l'équation (1), s'annulant pour $r = \infty$, est déterminée à un facteur près. La méthode classique de Laplace pour l'intégration des équations linéaires dont les coefficients sont du premier degré, par rapport à la variable, la donne bien aisément.

⁽¹⁾ *Comptes rendus* (5 juin 1900).

Posons

$$u = \int_{\alpha}^{\beta} v(z) e^{zr} dz,$$

les constantes α et β , et la fonction $v(z)$ étant à déterminer. En substituant dans l'équation différentielle, on voit que l'on aura une solution, si

$$-\frac{d(vz^2)}{dz} + vz + \frac{dv}{dz} = 0,$$

et si de plus

$$(v e^{zr})_{\alpha}^{\beta} = 0, \quad (v z^2 e^{zr})_{\alpha}^{\beta} = 0,$$

en entendant par $(f)_{\alpha}^{\beta}$ la différence des valeurs de f pour $z = \beta$ et $z = \alpha$. On pourra donc prendre

$$v = \frac{1}{\sqrt{z^2 - 1}},$$

et ensuite on prendra, comme champ d'intégration, un lacet entourant le point -1 , et venant de l'infini négatif et y retournant dans la direction de l'axe réel ($\alpha = \beta = -\infty$). On est ainsi conduit à la solution

$$u = \int_{-\infty}^{-1} \frac{e^{zr} dz}{\sqrt{z^2 - 1}}.$$

Cette solution de l'équation (1), définie pour r positif, s'annule évidemment pour $r = +\infty$. Il est indispensable pour nous de rechercher ce qu'elle devient pour $r = 0$. La forme de l'intégrale générale de l'équation (1) est

$$A G_0(r) \log r + G_1(r),$$

les G étant des fonctions entières de r ; $G_0(r)$ est une fonction paire de r et $G_0(0) = 1$. Il faut avoir la valeur de la constante A correspondant à u . Or si

$$\alpha = A G_0(r) \log r + G_1(r),$$

on voit de suite que

$$A = \lim_{r \rightarrow 0} \left(r \frac{du}{dr} \right).$$

Cherchons donc la limite de $r \frac{du}{dr}$ pour $r = 0$. Or

$$\frac{du}{dr} = \int_{-\infty}^{-1} \frac{z e^{zr} dz}{\sqrt{z^2 - 1}},$$

et, en posant $zr = t$, il vient

$$r \frac{du}{dr} = \int_{-\infty}^{-r} \frac{t e^t dt}{\sqrt{t^2 - r^2}},$$

le radical $\sqrt{t^2 - r^2}$ étant pris avec le signe *plus*. Pour avoir en toute rigueur la limite du second membre pour $r = 0$, il serait un peu rapide de faire de suite $r = 0$, quoiqu'on trouve ainsi immédiatement -1 .

Pour le voir avec plus de précision, prenons un nombre positif fixe ρ supérieur à r , aussi voisin, d'ailleurs, que l'on voudra de zéro si r est lui-même suffisamment petit, et partageons l'intégrale en deux parties

$$\int_{-\infty}^{-\rho} \frac{t e^t dt}{\sqrt{t^2 - r^2}} + \int_{-\rho}^{-r} \frac{t e^t dt}{\sqrt{t^2 - r^2}}.$$

Pour la première partie, on peut faire de suite $r = 0$, et l'on trouve ainsi

$$-e^{-\rho};$$

pour la seconde, elle peut s'écrire

$$e^t, \int_{-\rho}^{-r} \frac{t dt}{\sqrt{t^2 - r^2}} = -e^t, \sqrt{\rho^2 - r^2},$$

t , étant compris entre $-\rho$ et $-r$. Il résulte bien de là que, à partir d'une valeur suffisamment petite de r , l'intégrale proposée diffère de -1 d'aussi peu que l'on veut; nous avons donc

$$A = -1.$$

Pour l'intégrale trouvée, le flux est donc égal à -2π .

Je ferai encore une remarque sur la façon dont u tend vers zéro pour $r = \infty$, en montrant que le *produit*

$$u \sqrt{r} e^r$$

tend vers une limite finie et différente de zéro pour $r = \infty$. En posant

$$z = -1 + z',$$

on a

$$u = e^{-r} \int_{-\infty}^0 \frac{e^{z'r} dz'}{\sqrt{z'(z'-2)}},$$

et, en désignant par ρ une quantité positive, nous écrirons

$$u \sqrt{r} e^r = \sqrt{r} \int_{-\infty}^{-\rho} \frac{e^{zr} dz}{\sqrt{z(z-2)}} + \sqrt{r} \int_{-\rho}^0 \frac{e^{zr} dz}{\sqrt{z(z-2)}}.$$

La première partie, on le voit de suite, tend vers zéro pour $r = +\infty$; il s'agit d'avoir la limite de la deuxième partie. En changeant z en $-z$ nous l'écrivons

$$\sqrt{r} \int_0^{\rho} \frac{e^{-zr} dz}{\sqrt{z(z+2)}} \quad \text{ou} \quad \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2}} \int_0^{\rho} e^{-zr} z^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{z}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} dz.$$

On peut développer $\left(1 + \frac{z}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ suivant la formule de Taylor; le premier terme seul est intéressant pour nous; il se réduit à

$$\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2}} \int_0^{\rho} e^{-zr} z^{-\frac{1}{2}} dz,$$

ce qui, en posant $zr = y$, devient

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\rho r} e^{-y} y^{-\frac{1}{2}} dy.$$

Donc, pour $r = +\infty$, la limite cherchée sera

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-y} dy}{\sqrt{y}} \quad \text{ou} \quad \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Nous avons donc la formule cherchée

$$\lim_{r=\infty} (u \sqrt{r} e^r) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

2. Proposons-nous maintenant relativement à l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u$$

un second problème, qui, au point de vue physique, se rattacherait à l'équilibre calorifique de la surface d'un tore, et qui, au point de vue analytique, a une lointaine analogie avec la théorie des fonctions doublement périodiques.

Il s'agit de trouver l'intégrale de cette équation, ayant une période a par rapport à x et une période b par rapport à y , et continue sauf au point (α, β) et à ses homologues $(\alpha + ma, \beta + nb)$, où elle devient infinie comme le devenait tout à l'heure l'intégrale u à l'origine.

Il est clair d'abord que la solution est unique, car s'il y avait deux solutions, leur différence serait une solution de l'équation

$$\Delta u = u,$$

qui serait doublement périodique et continue dans tout le plan, ce qui est impossible, car une solution continue de l'équation précédente ne peut avoir ni maximum positif ni minimum négatif.

Pour avoir maintenant la solution cherchée, il n'y a qu'à se reporter au problème traité ci-dessus et à faire la somme des solutions correspondant à tous les homologues du point (α, β) . Formons la fonction

$$\Theta(z, x, y) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{z\sqrt{(x-\alpha-ma)^2+(y-\beta-nb)^2}}.$$

Elle est parfaitement définie pour z négatif, puisque

$$e^{z\sqrt{(x-ma)^2+(y-nb)^2}} < \frac{1}{z^{\frac{\mu}{2}}[(x-ma)^2+(y-nb)^2]^{\frac{\mu}{2}}} \quad (\mu > 1),$$

pour $|m|$ et $|n|$ suffisamment grands.

Formons alors l'expression

$$u(x, y) = + \int_{-\infty}^{-1} \frac{\Theta(z, x, y) dz}{\sqrt{z^2 - 1}}.$$

Ce sera l'intégrale de l'équation proposée, doublement périodique, et continue sauf aux points $(\alpha + ma, \beta + nb)$, où elle devient infinie comme le devenait à l'origine l'intégrale du paragraphe précédent.

On passe évidemment de suite de l'équation $\Delta u = u$ à l'équation

$$\Delta u = k^2 u \quad (k^2 > 0).$$

Nous avons ainsi un type de solutions doublement périodiques de cette équation, qui cesse entièrement d'exister dans le cas particulier correspondant à $k^2 = 0$.

M. PAINLEVÉ adresse la Note suivante :

De la détermination unique des intégrales d'un système d'équations différentielles ordinaires par les conditions initiales de Cauchy.

Dans son savant *Traité sur les équations différentielles*, dont les tomes II et III ont paru récemment ⁽¹⁾, M. Forsyth a discuté longuement la question de savoir si les conditions initiales de Cauchy définissent une solution unique d'un système différentiel. Il a formulé ⁽²⁾, au sujet des deux solutions distinctes que nous avons données, M. Picard et moi, de la question, des critiques qui ne me semblent pas fondées.

Je voudrais montrer ici que le procédé qui m'a permis d'établir que la solution de Cauchy est *unique* ne prête à aucune objection.

Il convient, avant tout, de bien préciser la question. Soit

$$(S) \quad \frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \dots, y_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

un système de n équations différentielles dont les seconds membres sont des fonctions analytiques des variables complexes $x, y_1, \dots, y_n$, holomorphes pour $x = a, y_1 = b_1, \dots, y_n = b_n$, par exemple holomorphes dans le domaine

$$|x - a| < R, \quad |y_1 - b_1| < R, \quad \dots, \quad |y_n - b_n| < R.$$

D'après le théorème de Cauchy, il existe une solution $y_1(x), \dots, y_n(x)$ de (S), holomorphe pour $x = a$, et qui répond aux conditions initiales

$$y_1(a) = b_1, \quad \dots, \quad y_n(a) = b_n.$$

⁽¹⁾ FORSYTH, *Theory of differential equations*, t. II et III; Cambridge, 1900.

⁽²⁾ *Loc. cit.*, t. II, p. 41-47 et p. 80-83.

Toute solution, holomorphe pour $x = a$, qui répond aux mêmes conditions initiales, coïncide évidemment avec la solution de Cauchy.

Mais ne saurait-il exister d'autres solutions analytiques $y_1(x), \dots, y_n(x)$ de (S), holomorphes dans un certain domaine Δ attenant au point $\bar{a}$, mais non au point a , et telles que, x tendant vers $\bar{a}$ à l'intérieur de Δ , les fonctions $y_1, \dots, y_n$ tendent respectivement vers $b_1, \dots, b_n$?

Aucune hypothèse n'est faite d'ailleurs sur le domaine Δ ; Δ peut être, par exemple, compris entre deux spirales qui admettent le point $\bar{a}$ comme point asymptote et dont l'arc croît indéfiniment quand le point de la courbe tend vers $\bar{a}$.

On peut encore poser la question ainsi :

Existe-t-il un chemin l aboutissant au point $\bar{a}$, tel qu'une solution $y_1(x), \dots, y_n(x)$ de (S) soit holomorphe sur l , sauf au point $\bar{a}$, et que $y_1(x), \dots, y_n(x)$ tendent respectivement vers $b_1, \dots, b_n$ quand x tend vers $\bar{a}$ sur l ?

Il est toujours loisible (en modifiant, si besoin est, le chemin l) d'admettre que l possède en chaque point une tangente continue. Soit s l'arc de l compté à partir d'un point $\bar{x}_1$, positivement dans le sens de $\bar{x}_1$ vers $\bar{a}$. Quand le point $\bar{x}$ parcourt l dans le sens positif, s croît constamment et tend vers une limite σ quand $\bar{x}$ tend vers $\bar{a}$, σ pouvant être égal à $+\infty$. Par exemple, l peut admettre le point $\bar{a}$ comme point asymptote, et l'arc compris entre $\bar{x}_1$ et $\bar{a}$ peut être infini.

Insistons enfin sur le sens précis des mots : $\bar{x}$ tend vers $\bar{a}$ sur l . Il n'y a aucun malentendu possible à ce sujet, si l est un chemin de longueur finie aboutissant au point $\bar{a}$. Mais supposons σ infini : on dit que $\bar{x}$ tend vers $\bar{a}$ sur l , si la distance rectiligne $\bar{x}\bar{a}$ tend constamment vers zéro quand s croît indéfiniment ; autrement dit, ϵ étant une quantité positive prise d'avance aussi petite qu'on veut, on peut trouver une valeur s' assez grande pour que

tous les points $\bar{x}$ de l qui correspondent à $s > s'$ soient intérieurs à un cercle de centre $\bar{a}$ et de rayon ϵ .

Ces préliminaires admis, on établit le théorème suivant :

THÉOREME. — *Il n'existe pas de solution $y_1(x), \dots, y_n(x)$ de (S), holomorphe sur un chemin l (aboutissant au point $\bar{a}$) sauf au point $\bar{a}$, et telle que $y_1(x), \dots, y_n(x)$ tendent vers $b_1, \dots, b_n$ quand $\bar{x}$ tend vers $\bar{a}$ sur $l^{(1)}$.*

La démonstration que j'ai proposée ⁽²⁾ s'appuie sur un lemme, aujourd'hui classique, conséquence presque immédiate du théorème fondamental de Cauchy.

LEMME. — *Soit $x_0, y_1^0, \dots, y_n^0$ des valeurs voisines respectivement de $a, b_1, \dots, b_n$, et soit*

$$(1) \quad y_i = \varphi_i(x, x_0, y_1^0, \dots, y_n^0), \quad (i = 1, 2, \dots, n);$$

la solution de Cauchy définie par les conditions initiales

$$y_i(x_0) = y_i^0, \quad (i = 1, 2, \dots, n);$$

(¹) C'est pour avoir interprété dans un tout autre sens les mots : « $\bar{x}$ tend vers $\bar{a}$ sur l » que M. Fuchs (*Berl. Sitzungsberichte*, 1886, p. 279) et M. Forsyth après lui (*loc. cit.*, tome II, p. 80-83) ont cru devoir nier l'exactitude du théorème précédent. Considérons l'exemple le plus simple de M. Fuchs, à savoir l'équation

$$(e) \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{y^2}{x}$$

dont l'intégrale générale est $y = \frac{1}{h + \log x}$ (h const. arbitraire).

La solution de Cauchy, définie par la condition $y(1) = 0$, n'est autre ici que $y \equiv 0$. D'autre part, faisons croître x de $\frac{1}{2}$ à 1 par valeurs réelles, en lui faisant de plus parcourir (dans le sens positif) le cercle de centre $x = 0$ et de rayon $1 - \frac{1}{n}$ chaque fois que x atteint une valeur $1 - \frac{1}{n}$, (n entier > 2); étudions les variations de la fonction $y = \frac{1}{h + \log x}$ quand x décrit le chemin L ainsi défini. Il est clair que pour les valeurs de x voisines de 1, $|y(x)|$ est très petit [par exemple, $\lim y\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 0$ pour $n = \infty$]; mais x ne tend pas vers 1 sur le chemin L ; le chemin L , tantôt se rapproche du point $x = 1$, tantôt s'en écarte à une distance plus grande que l'unité, un nombre indéfini de fois.

(²) Voir mes *Leçons de Stockholm*, p. 19-20 et p. 394-396.

les fonctions $\varphi_i(x, x_0, y_2^0, \dots, y_n^0)$ sont des fonctions analytiques des $(n+2)$ variables $x, x_0, y_1^0, \dots, y_n^0$, fonctions holomorphes pour

$$x = a, \quad x_0 = a, \quad y_1^0 = b_1, \dots, y_n^0 = b_n.$$

Autrement dit, les φ_i sont holomorphes dans le domaine

$$|x - a| < \rho, \quad |x_0 - a| < \rho, \quad |y_0 - b_1| < \rho, \dots, |y_0 - b_n| < \rho,$$

où ρ désigne une certaine quantité positive.

Quand on donne à $x_0, x, y_1, \dots, y_n$ des valeurs voisines respectivement de $a, a, b_1, \dots, b_n$, les équations (1) en $y_1^0, \dots, y_n^0$ admettant une solution (et une seule) pour laquelle $y_1^0, \dots, y_n^0$ sont voisins de $b_1, \dots, b_n$, à savoir la solution

$$(2) \quad y_i^0 = \varphi_i(x_0, x, y_1, \dots, y_n), \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Ce lemme admis, j'effectue le changement de variables

$$(3) \quad y_i = \varphi_i(x, a, u_1, \dots, u_n), \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

d'où l'on tire

$$(4) \quad u_i = \varphi_i(a, x, y_1, \dots, y_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Pour $x, y_1, \dots, y_n$ voisins de $a, b_1, \dots, b_n$, les quantités $u_1, \dots, u_n$ sont voisines de $b_1, \dots, b_n$; à la solution de Cauchy de (S) définie par les conditions initiales $x_0, y_1^0, \dots, y_n^0$, correspond pour les u_i , le système de fonctions $u_i(x) \equiv y_i^0$. Le système (S) se transforme donc, d'après (3), (4), dans le système (1)

$$(S') \quad \frac{du_i}{dx} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

S'il existe une solution $y_1(x), \dots, y_n(x)$ de (S) holomorphe sur un chemin l (aboutissant au point $\bar{a}$) mais non au point $\bar{a}$, et telle que $y_1, \dots, y_n$ tendent vers $b_1, \dots, b_n$ quand x tend

* (1) En effet, la solution de Cauchy, définie pour (S') par les conditions initiales $u_1(x_0) = u_1^0, \dots, u_n(x_0) = u_n^0$, doit se réduire à $u_1 \equiv u_1^0, \dots, u_n \equiv u_n^0$, (quels que soient $x_0, u_1^0, \dots, u_n^0$, voisins de $a, b_1, \dots, b_n$). Cela n'est possible que si les coefficients différentiels de (S') sont identiquement nuls.

vers $\bar{a}$ sur l , il existera une solution $u_1(x), \dots, u_n(x)$ de (S') qui satisfera aux mêmes conditions. Or cette solution, composée de fonctions qui, d'après (S'), sont constantes sur l , se confondra nécessairement avec la solution de Cauchy $u_1 = b_1, \dots, u_n = b_n$, ce qui est contre l'hypothèse.

En un mot, la transformation (3) ramène le cas d'un système (S) quelconque au cas d'un système (S'), pour lequel le théorème en question est intuitif. C. Q. F. D.

Remarque. — Nous avons supposé que la solution $y_1(x), \dots, y_n(x)$, non holomorphe pour $x = a$, était analytique sur un chemin l aboutissant au point $\bar{a}$. Bornons-nous, pour un instant, à considérer les valeurs *réelles* de la variable; faisons tendre x (par valeurs réelles croissantes, par exemple) vers la valeur réelle a , et soit $y_1(x), \dots, y_n(x)$ un système de fonctions, *analytiques ou non*, qui vérifient le système (S) et telles que $y_1(x), \dots, y_n(x)$ tendront vers $b_1, \dots, b_n$ quand x tend vers a . De la démonstration qui précède il résulte que la solution $y_1(x), \dots, y_n(x)$ se confond avec la solution de Cauchy (1).

Plus généralement, soit l un chemin continu aboutissant au point $\bar{a}$, chemin dont l'arc s existe mais peut croître indéfiniment quand $\bar{x}$ tend vers $\bar{a}$. Supposons qu'il existe un système de fonctions $y_1(x) = Y_1(s), \dots, y_n(x) = Y_n(s)$, *analytiques ou non*, mais bien définies sur le chemin l (2), telles que, d'une

(1) Il est loisible, en augmentant le nombre des fonctions, de supposer (S) réel. La remarque précédente résulte alors aussi bien de la méthode de Cauchy-Lipschitz, ou de la méthode d'approximations successives de M. Picard.

(2) On peut même supposer que l est un chemin continu sans tangente. Soit $y_i(x)$ une fonction bien déterminée en tout point x de l , telle que le rapport $\frac{y_i(x + \Delta x) - y_i(x)}{\Delta x}$ (où x et $x + \Delta x$ sont deux points de l) tende vers une limite $y'_i(x)$ quand Δx tend vers zéro; si le système $y_1(x), \dots, y_n(x)$ vérifie en tout point de l les égalités

$$y'_i = f_i(x, y_1, \dots, y_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

et si, de plus, $y_1(x), \dots, y_n(x)$ tendent vers $b_1, \dots, b_n$ quand $\bar{x}$ tend vers $\bar{a}$ sur l , le système $y_1(x), \dots, y_n(x)$ se confond avec la solution de Cauchy.

part, $y_1, \dots, y_n$ tendent vers $b_1, \dots, b_n$ quand $\bar{x}$ tend vers $\bar{a}$ sur l , et que, d'autre part, les égalités

$$\frac{\frac{dy_i}{ds}}{\frac{dx_i}{ds}} = f_i(x, y_1, \dots, y_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

soient vérifiées en tout point de l . La démonstration précédente établit que le système de fonctions $y_1(x), \dots, y_n(x)$ se confond avec la solution de Cauchy.

M. RIPERT adresse la Communication suivante :

**Sur les triangles trihomologiques inscrits ou circonscrits
à une conique.**

1. *On peut inscrire et circonscrire à toute conique une double infinité (P, Q) de triangles trihomologiques à tout triangle inscrit ou circonscrit donné A et trihomologiques entre eux. Les neuf centres d'homologie sont en ligne droite et les neuf axes passent par un point fixe, si les triangles A, P, Q sont tous les trois soit inscrits soit circonscrits. Si A est inscrit et P, Q circonscrits, ou vice versa, les centres du couple (P, Q) restent en ligne droite et ses axes concourants; les six centres des couples (A, P) et (A, Q) sont sur une conique et les six axes correspondants touchent une autre conique.*

2. Les coordonnées étant barycentriques, et étant posé

$$i, k, l = 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2,$$

soit le triangle A_i inscrit dans la conique $\Gamma\left(\sum \frac{\alpha_i}{x_i} = 0\right)$; soit (1)

$$K = \sum \alpha_i u_i = 0$$

(1) Je représente un point par son équation tangentielle :

$$K(x_1, \alpha_1, \alpha_2) \quad \text{et} \quad K = \sum \alpha_i u_i = 0$$

sont équivalents. On est prié de faire la figure.

le centre d'homologie de A_i et du triangle circonscrit a_i dont les sommets sont les pôles des côtés $A_k A_l$, et soit

$$\Delta = \sum \frac{x_i}{a_i} = 0$$

l'axe d'homologie déterminé par les points

$$\Delta_i = \alpha_k u_k - \alpha_l u_l = 0$$

d'intersection des tangentes aux points A_i avec les côtés $A_k A_l$. Prenons sur Γ un point arbitraire ($P_i = \sum \beta_i u_i = 0$); soient Q_i les intersections de Γ avec les droites $P_i \Delta_i$.

- 1° Les droites $\Delta_i Q_k$ concourent, sur Γ , au point P_2 , et les droites $\Delta_i Q_l$ au point P_3 ;
2° Les triangles A_i, P_i, Q_i sont deux à deux trihomologiques.

En effet, soit ($\sum \lambda_i u_i = 0$) l'inverse par rapport à K du point P_i de Γ , c'est-à-dire le point

$$P'_i = \sum \frac{\alpha_i}{\beta_i} u_i = 0;$$

à cause de

$$\sum \frac{\alpha_i}{\beta_i} = 0,$$

on a

$$\sum \lambda_i = 0;$$

en d'autres termes, P'_i est à l'infini.

L'équation de Γ est toujours satisfaite, avec cette condition, par les six points

$$P_i = \frac{\alpha_l}{\lambda_1} u_l + \frac{\alpha_k}{\lambda_2} u_k + \frac{\alpha_l}{\lambda_3} u_l = 0, \quad Q_i = \frac{\alpha_l}{\lambda_l} u_l + \frac{\alpha_k}{\lambda_l} u_k + \frac{\alpha_l}{\lambda_k} u_l = 0.$$

Les droites $(A_i P_i, A_k P_l, A_l P_k)$ concourent aux points p_i et les triples de droites $(A_i Q_i), (A_i Q_k), (A_i Q_l)$ concourent respectivement aux points q_i :

$$p_i = \alpha_l \lambda_l u_l + \alpha_k \lambda_l u_k + \alpha_l \lambda_k u_l = 0, \quad q_i = \alpha_l \lambda_1 u_l + \alpha_k \lambda_2 u_k + \alpha_l \lambda_3 u_l = 0.$$

Enfin les triples $(P_i Q_i)$, $(P_i Q_k)$, $(P_i Q_l)$ concourent respectivement aux points Δ_i .

Les équations des axes d'homologie π_i , χ_i , δ_i correspondants sont

$$\begin{aligned}\pi_i &= \frac{\lambda_l}{\alpha_l} x_i + \frac{\lambda_l}{\alpha_k} x_k + \frac{\lambda_k}{\alpha_l} x_l = 0, \\ \chi_i &= \frac{\lambda_1}{\alpha_l} x_i + \frac{\lambda_2}{\alpha_k} x_k + \frac{\lambda_3}{\alpha_l} x_l = 0, \quad \delta_i = \frac{x_k}{\alpha_k} - \frac{x_l}{\alpha_l} = 0.\end{aligned}$$

Les neuf centres sont sur Δ ; les neuf axes passent par K ; d'ailleurs, chaque axe est la polaire du centre correspondant.

Si le point P_i est pris en

$$A'_i = 2\alpha_k u_k + 2\alpha_l u_l - \alpha_i u_i = 0$$

sur une droite δ_i , deux points P et Q s'y confondent; les triangles A_i et A'_i deviennent *tétrahomologiques*, les quatre centres étant K et les points Δ'_i ($2\alpha_i u_i - \alpha_k u_k - \alpha_l u_l = 0$); les axes sont Δ et les droites

$$\delta'_i = 2\frac{x_i}{\alpha_i} - \frac{x_k}{\alpha_k} - \frac{x_l}{\alpha_l} = 0.$$

3. Considérons maintenant le triangle a_i (n° 2), circonscrit à Γ , A_i étant le triangle des points de contact. Ces deux triangles sont, comme on sait, *tétrahomologiques* (centres K et a_i).

Les triangles a_i et P_i , a_i et Q_i sont *trihomologiques*, car les droites $(a_i P_i)$, $(a_i P_k)$, $(a_i P_l)$ concourent en

$$\begin{aligned}m_i &= \alpha_i [\lambda_k \lambda_l (\lambda_k \lambda_l + \lambda_i^2) + \lambda_i^2 (\lambda_k \lambda_l - \lambda_i^2)] u_i + \alpha_k (\lambda_k^2 \lambda_l - \lambda_k^2 \lambda_l - \lambda_i^2 \lambda_k^2) u_k \\ &\quad + \alpha_l (\lambda_l^2 \lambda_k - \lambda_l^2 \lambda_l - \lambda_i^2 \lambda_k^2) u_l = 0,\end{aligned}$$

et les triples $(a_i Q_i)$, $(a_i Q_k)$, $(a_i Q_l)$ concourent respectivement aux points n_i

$$\begin{aligned}n_i &= \alpha_i [\lambda_k \lambda_l (\lambda_k \lambda_l + \lambda_i^2) + \lambda_i^2 (\lambda_k \lambda_l - \lambda_i^2)] u_i + \alpha_k (\lambda_k^2 \lambda_l - \lambda_k^2 \lambda_l - \lambda_i^2 \lambda_k^2) u_k \\ &\quad + \alpha_l (\lambda_k^2 \lambda_l - \lambda_k^2 \lambda_l - \lambda_i^2 \lambda_k^2) u_l = 0.\end{aligned}$$

Les points m_i et n_i sont sur une conique, comme on le reconnaît en calculant une *Pascale* (voir au n° 5). Les axes

d'homologie correspondants ont pour équations, en posant

$$L_i = \frac{1}{\lambda_k} + \frac{1}{\lambda_l} - \frac{1}{\lambda_i},$$

$$\mu_i = \frac{L_i}{\alpha_i} x_i + \frac{L_l}{\alpha_k} x_k + \frac{L_k}{\alpha_l} x_l = 0, \quad \nu_i = \frac{L_1}{\alpha_i} x_i + \frac{L_2}{\alpha_k} x_k + \frac{L_3}{\alpha_l} x_l = 0.$$

Ces six axes touchent une conique; on le reconnaît en calculant un point de Brianchon.

En tenant compte du principe de dualité, le théorème (n° 1) est entièrement démontré.

4. Les triples $(A_i p_i)$, $(A_i p_k)$, $(A_i p_l)$ concourent aux points P_i ; les droites $(A_i q_i)$, $(A_k q_l)$, $(A_l q_k)$ concourent aux points Q_i ; les droites $(A_i \Delta_i)$, $(A_k \Delta_l)$, $(A_l \Delta_k)$ concourent aux points A_i . Donc, les triangles dégénérés p_i , q_i , Δ_i sont les complémentaires du type Brocardien des triangles P_i , Q_i , A_i au sens indiqué par M. JAHNKE (*Ueber dreifach perspektivische Dreiecke*; Berlin, 1900).

Les triples $(a_i m_i)$, $(a_i m_k)$, $(a_i m_l)$ concourent respectivement aux points P_i ; les droites $(a_i n_i)$, $(a_k n_l)$, $(a_l n_k)$ concourent en Q_i . Les triangles (véritables) m_i et n_i sont donc les complémentaires du type Brocardien des triangles P_i et Q_i , par rapport au triangle a_i .

5. Les propriétés du n° 3 se démontrent plus aisément en prenant le triangle a_i pour triangle de référence. Soient, par rapport à ce triangle, $\sum \frac{u_i}{\gamma_i} = 0$ et $\sum \gamma_i x_i = 0$ les équations correspondantes de K et de Δ . La conique Γ a pour équation

$$\sum \gamma_i^2 x_i^2 - 2 \sum \gamma_k \gamma_l x_k x_l = 0.$$

Elle passe toujours, avec la condition $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 0$, le point $\sum \mu_i x_i = 0$ n'étant autre, par rapport au triangle a_i , que le point P'_i (n° 2), par les six points

$$P_i = \frac{\mu_i^2}{\gamma_1} u_1 + \frac{\mu_k^2}{\gamma_2} u_2 + \frac{\mu_l^2}{\gamma_3} u_3 = 0, \quad Q_i = \frac{\mu_i^2}{\gamma_1} u_1 + \frac{\mu_l^2}{\gamma_2} u_2 + \frac{\mu_k^2}{\gamma_3} u_3 = 0.$$

La vérification des propriétés du n° 3 est alors presque immédiate.

Il est aisé de développer les bases qui précèdent. On peut démontrer, par exemple, que les triangles m_i et n_i , trihomologiques

à a_i , le sont aussi à A_i , que les six centres M_i et N_i des couples (A, m) et (A, n) forment deux triangles trihomologiques à a et A , les nouveaux centres (m'_i, n'_i) formant deux triangles également trihomologiques à a et à A , etc., et reconnaître qu'à chaque triangle correspond un triangle complémentaire du type Brocardien.

M. BOREL adresse la Note suivante :

Sur le prolongement analytique de la série de Taylor.

J'ai indiqué, dans mon *Mémoire sur les séries divergentes* (*Annales de l'École Normale*, 1899, p. 65) comment la connaissance d'un développement en série de $\frac{1}{1-z}$ convergent dans une région A , plus grande que le cercle de rayon un , permet d'obtenir un développement analogue pour une fonction quelconque. Je voudrais signaler ici une formule particulièrement simple, que l'on obtient en prenant pour $\frac{1}{1-z}$ l'un des développements que fournit la série de Taylor. On a

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{2-(1+z)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}(1+z) + \dots + \frac{1}{2^{n+1}}(1+z)^n + \dots$$

Le $(n+1)^{\text{ième}}$ terme de cette série s'écrit, en désignant par C_n^p les coefficients binomiaux,

$$\frac{1}{2^{n+1}} (1 + C_n^1 z + C_n^2 z^2 + \dots + C_n^p z^p + \dots + C_n^n z^n).$$

Dès lors, soit

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots$$

une série de Taylor, dont le rayon de convergence n'est ni nul ni infini. En posant

$$P_n(z) = \frac{1}{2^{n+1}} (a_0 + C_n^1 a_1 z + \dots + C_n^p a_p z^p + \dots + C_n^n a_n z^n)$$

le développement

$$f(z) = \sum P_n(z)$$

est convergent dans une région aisée à déterminer, et qui dépasse le cercle de convergence en tout point non singulier.

EXTRAIT DES STATUTS ET DU RÈGLEMENT.

La Société mathématique de France a pour objet l'avancement et la propagation des études de Mathématiques pures et appliquées. Elle y consacre par ses travaux et ses publications. Elle a son siège à Paris.

La Société se compose de sociétaires perpétuels, de membres résidents et de membres non résidents, en nombre illimité.

Sont considérés comme résidents les membres qui ont à Paris leur domicile ou leurs occupations professionnelles.

Les Étrangers peuvent faire partie de la Société.

Les conditions à remplir, pour être membre de la Société, sont les suivantes : 1° avoir été présenté par deux de ses membres et agréé par le Conseil d'administration ou par le Bureau agissant en vertu d'un mandat du Conseil; 2° avoir obtenu, à l'une des séances qui ont suivi la présentation, les suffrages de la majorité des membres présents; 3° avoir versé un droit d'admission de *dix francs*; 4° payer une cotisation annuelle dont le montant est de *vingt francs* pour les membres résidents; et de *quinze francs* pour les membres non résidents.

La cotisation annuelle peut toujours être rachetée par une somme de *trois cents francs*, versée dans les conditions fixées par le règlement administratif de la Société.

Ce versement confère le titre de *sociétaire perpétuel*.

La cotisation annuelle est payée au commencement de chaque exercice dont l'origine est fixée au 1^{er} novembre de chaque année.

Les nouveaux membres doivent payer la totalité de la cotisation de l'exercice en cours, quelle que soit l'époque de leur admission.

La Société tient des séances ordinaires deux fois par mois; elle prend trois mois de vacances, en août, septembre et octobre.

Pour assister aux séances, les personnes étrangères à la Société doivent être présentées par l'un de ses membres.

La Société publie par livraisons un Recueil annuel qui a pour titre : *Bulletin de la Société mathématique de France*, et qui contient, avec un extrait des procès-verbaux des séances, des Notes et Mémoires sur les Mathématiques pures ou appliquées, ayant pour auteurs des membres de la Société, et présentant quelque originalité au point de vue de la méthode ou des résultats.

Les livraisons du *Bulletin* sont adressées à tous les membres de la Société, au fur et à mesure de leur publication. Toutefois, dans le cas où un sociétaire se met en retard dans le paiement de sa cotisation, l'envoi du *Bulletin* est suspendu pour lui, jusqu'à ce qu'il ait acquitté l'arriéré.

La Société entretient une bibliothèque, qui est alimentée par les dons particuliers, les achats autorisés par son Conseil d'administration, et l'échange de ses publications avec les journaux et recueils consacrés aux Mathématiques pures et appliquées, paraissant en France et à l'Étranger.

TABLe DES MATIÈRES

(FASCICULE 3).

Mémoires et Communications.

[H 9 d]. — Sur un exemple d'approximations successives d'iter- antes; par M. <i>Émile Picard</i>	127
[R 2 h]. — Sur le centre de gravité d'un quadrilatère; par M. <i>Car- pary</i>	133
[I 23]. — Sur une propriété arithmétique des logarithmes des nom- bres algébriques; par M. <i>Carl Störmer</i>	136
[I 40]. — Problème de partition; par M. <i>d'Ocagne</i>	157
[C 2 g]. — Sur un invariant d'un système de deux triangles et la théo- rie des intégrales doubles; par M. <i>Le Roux</i>	168
[D 1 a]. — Nouvelle démonstration d'un théorème sur les fonctions discontinues; par M. <i>Baire</i>	173
[O 3 e]. — Sur la torsion d'une courbe définie par son plan oscula- teur; par M. <i>Demoulin</i>	180

Comptes rendus des Séances.

[H 10 d]. — Sur quelques problèmes relatifs à l'équation $\Delta u = k^2 u$; par M. <i>Émile Picard</i>	186
[H 1 a]. — De la détermination unique des intégrales d'un système d'équations différentielles ordinaires par les conditions initiales de Cauchy; par M. <i>Pointévé</i>	191
[L 16 a]. — Sur les triangles trilunologiques inscrites ou circon- scrites à une conique; par M. <i>Ripert</i>	196
[D 2 b a]. — Sur le prolongement analytique de la série de Taylor, par M. <i>Borel</i>	200

MODIFICATIONS A LA LISTE DES MEMBRES DE LA SOCIÉTÉ

Date de
l'adhésion

1895. **BOUHA** (Émile), maître de conférences à l'École normale, 30, boulevard
Saint Germain.
1871. **BRICARD**, ingénieur des Manufactures de l'État, répétiteur à l'École
Polytechnique, 6, rue Monge.
1879. **WOLST** (Elling), professeur à l'École Polytechnique, à Håvik, près Chris-
tiania (Norvège).
1900. **LAKOMÉ** (Edmond), docteur en philosophie, Sommerstrasse, 2, Berlin
N. W.

18163. Borel. — Imprimerie Gauthier-Villars, quai des Grands-Augustins, 25.

Le Gérant : GAUTHIER-VILLARS.

Publication trimestrielle.

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE

PUBLIÉ
PAR LES SECRÉTAIRES.

S'adresser pour la rédaction, à M. BOUTY, boulevard Saint-Germain, 30, Paris, 5^e;
pour la distribution, à M. BIERNA, rue Claude-Bernard, 65, Paris, 5^e.

TOME XXVIII. — FASCICULE IV.

PARIS,
AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ,
A LA HORRONNE.

1900

MM. les Membres de la Société sont priés d'adresser leur cotisation à M. Claude-Lafontaine, banquier, rue de Trévise, n° 32, à Paris, Trésorier de la Société.

On s'abonne et on trouve les Volumes déjà publiés au siège de la Société et à la Librairie Gauthier-Villars, 55, quai des Grands-Augustins, Paris.

Prière de lire les avis importants

Les séances de la Société mathématique ont lieu les premier et troisième mercredis de chaque mois à 8 heures et demie.

Depuis le 1^{er} Mars 1900 les séances de la Société ont lieu dans une salle de la Faculté des Sciences (entrée place de la Sorbonne, escalier tout au bout de la galerie, deuxième étage à droite).

Les Membres de la Société ont dû recevoir une carte, portant le timbre du Secrétariat, leur donnant accès à la Bibliothèque de l'Université, et fournissant à ce sujet les renseignements nécessaires; ceux qui ne l'auraient pas reçue sont priés d'en informer le Secrétariat.

La correspondance peut être adressée, soit à la Faculté des Sciences, place de la Sorbonne, soit au domicile de l'un des secrétaires, de préférence à M. Blutel, sauf ce qui concerne la rédaction du Bulletin qui doit être adressé de préférence à M. Borel.

AVIS.

Dans sa séance du 2 février 1883, le Conseil de la Société mathématique de France a décidé qu'à l'avenir tout Membre de la Société qui voudra compléter sa collection du *Bulletin* aura le droit personnel de le faire, une seule fois pour chacun des volumes publiés avant son admission, aux prix suivants :

	Le volume.
	fr
Dix volumes au moins.....	4,60
De cinq à neuf volumes.....	5,00
Moins de cinq volumes.....	6,00

Dans sa séance du 28 février 1900, le Conseil de la Société mathématique de France a décidé qu'à l'avenir tout Membre de la Société, auteur d'un travail *quelconque* inséré dans le Bulletin et désirant en obtenir des tirages à part, **devra en faire la demande en retournant l'épreuve corrigée.**

Si le nombre demandé ne dépasse pas *cinquante*, les frais du tirage à part seront faits par la Société.

Conformément à des décisions prises par le Conseil et par la Commission d'impression :

1^o Le *Bulletin*, depuis le Tome XXVII, paraît **tous les trois mois.**

2^o Les auteurs de tous les travaux destinés au *Bulletin* sont **instamment priés** d'insérer en tête de leurs manuscrits la classification que leur assigne, d'après le sujet traité, l'*Index du Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques.*

3^o Ils sont également invités à ne pas dépasser, autant que possible, la proportion de **une figure pour quatre pages** de texte imprimé.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

MÉMOIRE SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DONT L'INTÉGRALE GÉNÉRALE EST UNIFORME;

Par M. P. PAINLEVÉ.

1. La détermination des transcendentes uniformes définies par les équations différentielles algébriques est un problème qui se trouve posé en fait depuis les travaux d'Abel et de Jacobi sur l'équation

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = (1 - y^2)(1 - k^2 y^2).$$

C'est l'étude de cette équation qui a engendré la théorie des fonctions elliptiques, et (par extension) celle des fonctions uniformes. Cette dernière théorie une fois fondée, il s'agissait moins de construire artificiellement des transcendentes nouvelles que de découvrir, dans l'immense famille des transcendentes uniformes, celles qui peuvent servir à intégrer les équations différentielles. La fonction *exponentielle*, les fonctions *elliptiques* étaient les premiers types de telles fonctions : on ne tarda pas à en découvrir d'autres, à savoir : les fonctions *abéliennes*, puis les intégrales uniformes des équations différentielles *linéaires*; enfin, les fonctions *fuchsiennes* ou *automorphes*, *hyperfuchsiennes*, etc.

Mais l'étude de ces nouvelles transcendentes, si importante qu'elle fût, ne permettait en aucune manière d'épuiser le problème qui se posait dès lors naturellement :

Déterminer toutes les équations différentielles algébriques du premier ordre, puis du second ordre, puis du troisième ordre, etc., dont l'intégrale générale est uniforme.

Ce problème, abordé dès 1856, dans des cas particuliers, par Briot et Bouquet, Méray, Weierstrass, a suscité, dans le cours de ces vingt dernières années, les efforts de nombreux géomètres, parmi lesquels il suffit de citer MM. Fuchs, Poincaré, Picard, Mittag-Leffler, Fransen, Wallenberg, Forsyth. Pour les équations du premier ordre, la question peut être regardée comme élu-

cidée (¹); mais dès qu'on passe du premier ordre au second, des difficultés d'une nature toute nouvelle interviennent, sur lesquelles je crois utile d'insister.

2. Considérons une équation du second ordre

$$y'' = \frac{P(x, y, y')}{Q(x, y, y')},$$

où P et Q sont des polynômes en x, y, y' ; et soient x_0, y_0, y'_0 des valeurs qui n'annulent pas à la fois P et Q. On sait étudier, dans le voisinage de x_0 , l'intégrale $y(x)$ définie par les conditions initiales $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0$. Quand x_0, y_0, y'_0 annulent à la fois P et Q, le point x_0 , est, en général, une singularité transcendante des intégrales $y(x)$ définies par ces conditions initiales, et c'est seulement dans des cas particuliers que les méthodes de M. Poincaré (en dépit de perfectionnements récents) permettent d'étudier ces intégrales; on conçoit cependant qu'il soit possible d'étendre ces méthodes à des cas de plus en plus généraux. Mais quand on poursuit l'étude d'une intégrale $y(x)$ le long d'un chemin quelconque du plan des x , il arrive qu'on rencontre des points singuliers $x = a$ d'une nature toute différente : à savoir des points $x = a$ tels que y ou y' ne tende vers aucune limite (finie ou non) quand x tend vers a .

Considérons, par exemple, l'équation

$$y'' = \frac{y'^2(1+i)}{y},$$

dont l'intégrale générale est

$$y = (Ax + B)^i, \quad (A, B \text{ constantes arbitraires}).$$

Quand x tend vers le point d'affixe $-\frac{B}{A}$ sur une direction quelconque (²), $y(x)$ est indéterminé. Une infinité de valeurs de y se permutent, d'ailleurs, autour de ce point qui est à la fois point essentiel et point critique de $y(x)$.

(¹) Les transcendentes uniformes introduites par les équations du premier ordre sont, d'ailleurs, réductibles aux transcendentes classiques, comme M. Poincaré l'a montré le premier.

(²) Il est facile de former des exemples où $y(x)$ est indéterminé quand x tend vers a sur un chemin l , quel que soit le chemin adopté (voir le n° 18).

On conçoit immédiatement la profondeur de la difficulté que crée l'existence possible de telles singularités, variables avec les constantes d'intégration et que rien ne met en évidence sur l'équation différentielle. Comment étudier l'intégrale $y(x)$ dans le voisinage d'un de ces points où la valeur de $y(x)$ est indéterminée? Comment exprimer notamment qu'un tel point n'est pas critique, c'est-à-dire ne donne pas lieu à des branchements de l'intégrale? *Comment surtout décider si de telles singularités existent ou non?* A toutes ces questions, les méthodes dérivées de la doctrine de Cauchy semblaient incapables de répondre. Un tel obstacle pouvait donc, à bon droit, être regardé comme insurmontable. C'est l'opinion qu'exprimait M. Picard dans le dernier travail qu'il ait consacré à ce genre de problèmes. Après avoir insisté sur l'existence des singularités essentielles mobiles, l'illustre géomètre aboutissait à cette conclusion que, seule, l'intégration d'une équation différentielle (j'entends sa réduction aux quadratures et aux équations linéaires) permettait d'affirmer l'uniformité de son intégrale. « Ces réflexions, ajoutait-il, ne sont pas, en définitive, très encourageantes. Il est peu probable que les équations d'ordre supérieur, à points critiques fixes, puissent conduire à l'étude de transcendentes nouvelles. » (*Acta mathematica*, t. XVII; 1893.)

3. C'est cette difficulté dont je suis parvenu à triompher dans le cours de ces deux dernières années. J'ai pu, en particulier, résoudre *explicitement* le problème suivant :

Parmi les équations

$$(E) \quad y' = R(x, y, y'),$$

où R est rationnel en y' , et algébrique en y, x , déterminer toutes celles dont l'intégrale générale est uniforme ⁽¹⁾.

Ces équations se laissent répartir en quinze classes, parmi lesquelles trois classes définissent des transcendentes méromorphes essentiellement nouvelles. Je citerai seulement les deux pre-

(¹) Aucune autre hypothèse que l'uniformité n'est faite sur l'intégrale $y(x)$: elle peut, *a priori*, présenter des singularités essentielles mobiles de nature quelconque.

mières. Ces deux classes sont réductibles [par une transformation algébrique $y = f(Y, X)$, $x = \varphi(X)$] à un des types

$$(I) \quad y'' = \alpha y^2 + \beta x + \gamma,$$

$$(II) \quad y'' = \alpha y^2 + (\beta x + \gamma)y + \delta,$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ désignant des constantes numériques. Si $\beta = 0$, l'équation (I) définit les fonctions elliptiques, et, si $\alpha = 0$, des polynômes; d'autre part, si $\alpha\beta \neq 0$, la transformation $y = \lambda Y$, $x = \mu X + \nu$ permet de donner à α la valeur 6, à β la valeur 1, à γ la valeur zéro. De même, dans l'équation (II), il est loisible de supposer $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $\gamma = 0$. Bornons-nous donc à considérer les équations

$$(1) \quad y'' = 6y^2 + x,$$

$$(2) \quad y'' = 2y^2 + xy + \delta.$$

Les intégrales de ces deux équations sont des fonctions méromorphes essentiellement nouvelles.

Puisqu'elles sont méromorphes, il est évident qu'elles sont représentables par le quotient de deux fonctions *entières*; mais, ce qu'il importe de remarquer, c'est qu'on peut choisir ces fonctions entières de manière qu'elles vérifient une équation différentielle très simple du troisième ordre.

Pour l'équation (1), il suffit de poser

$$z = \frac{y'^2}{2} - 2y^2 - xy, \quad u = e^{\int z dx};$$

la fonction $u(x)$ est une fonction ENTIÈRE qui vérifie l'équation

$$(3) \quad \frac{z'^2}{2} + 2z'^2 + xz' - z = 0, \quad \text{où} \quad \frac{u'}{u} = z,$$

et l'on a

$$\gamma = \frac{u'^2 - uu''}{u^2}.$$

Pour l'équation (2), si l'on pose

$$z = y'^2 - y^4 - xy^2 - 2\delta y, \quad u = e^{\int z dx}, \quad v = uy,$$

les fonctions u, v sont des fonctions ENTIÈRES qui vérifient le

système du troisième ordre

$$(4) \quad uu'' - u'^2 + v^2 = 0, \quad (u'v - vu')^2 = v^4 + xv^2u^2 + (2\delta v + u')u^3,$$

et l'on a

$$y = \frac{v}{u}.$$

De plus, soient

$$2x_1 = z - y, \quad 2x_2 = z + y;$$

les fonctions $u_1 = e^{\int z_1 dx}$, $u_2 = e^{\int z_2 dx}$ sont deux fonctions *entières* qui vérifient respectivement une équation du troisième ordre facile à former, et l'on a

$$u = u_1 u_2, \quad v = u'_2 u_1 - u'_1 u_2, \quad y = \frac{u'_2}{u_2} - \frac{u'_1}{u_1}.$$

Les fonctions entières u , v définies par les équations (3) ou (4) sont des transcendantes *entières essentiellement nouvelles*.

4. Les équations (1) et (2) doivent être regardées comme *intégrées* au sens moderne du mot, exactement comme l'équation

$$y'^2 = (1 - y^2)(1 - k^2 y^2)$$

est intégrée par le quotient de deux fonctions θ . Si l'on définit l'intégrale $y(x)$ de (1) ou de (2) par les conditions initiales x_0, y_0, y'_0 , la fonction $y(x)$ est représentée par le quotient de deux séries entières en $(x - x_0)$, séries qui convergent dans tout le plan des x et dont les coefficients se calculent par des dérivations successives. Ces coefficients sont des polynômes en x_0, y_0, y'_0 .

C'est là un résultat dont le caractère me semble entièrement nouveau. Depuis la fondation du Calcul intégral, toutes les équations qu'on a réussi à intégrer (au sens le plus large de ce terme) sont réductibles à des combinaisons *d'équations linéaires et de quadratures*. D'une façon générale, c'est parce qu'on connaît la manière dont les constantes figurent dans l'intégrale qu'on sait étudier cette intégrale. Même les équations qui définissent les fonctions fuchsienues n'échappent pas à cette remarque. *Les équations (1) et (2) constituent donc le premier exemple connu d'équations qui se trouvent intégrées à l'aide des principes de la théorie des fonctions, sans être réductibles à aucune combinaison d'équations linéaires, de quadratures et même d'équations du premier ordre.*

J'ajoute que le caractère précis des types canoniques (1) et (2)

ne doit pas faire méconnaître le degré de généralité des équations différentielles qu'intègrent les nouvelles transcendentes. C'est ainsi que, parmi les équations de la forme

$$(5) \quad y'' = a(x)y' + b(x)y^2 + c(x)y + d(x),$$

celles qui sont réductibles algébriquement à la forme (1) ont leurs coefficients a, b, c, d assujettis à une condition *unique*; elles dépendent de *trois* fonctions arbitraires de x , et constituent une classe qui a la même généralité que celle des équations linéaires (non homogènes) du second ordre.

5. Pour parvenir aux résultats que je viens de résumer, il m'a fallu constituer une double méthode qui répondit à ce double objet : 1° former des conditions *nécessaires* (nouvelles) pour qu'une équation ait ses points critiques fixes; 2° décider si ces conditions sont ou non *suffisantes*.

Cette double méthode permet aussi bien de résoudre le problème suivant (un peu plus général que celui que j'ai énoncé au début du n° 3) :

Parmi les équations (E) où R est rationnel en y' , algébrique en y , analytique en x , déterminer explicitement toutes celles qui ont leurs points critiques fixes (1).

Ce n'est pas le souci d'une généralisation facile qui m'a conduit à cette extension du premier problème; c'est la marche même de la solution qui me l'a imposée. Pour exprimer que l'intégrale générale d'une équation différentielle est uniforme, il faut exprimer d'abord qu'elle n'admet pas de points critiques *mobiles*; et pour simplifier les conditions ainsi obtenues il est indispensable d'employer certaines transformations, algébriques par rapport à la fonction, mais où la variable indépendante peut figurer sous forme transcendante. Ces transformations introduisent des points critiques fixes et ne conservent pas à l'équation son caractère algébrique par rapport à x .

La même méthode s'applique d'ailleurs sans modification à

(1) Le nom de points *critiques* est réservé exclusivement aux points singuliers (isolés ou non) autour desquels deux branches au moins de $y(x)$ se permutent. Les points critiques sont dits *mobiles* ou *fixes* suivant qu'ils varient ou non avec les constantes d'intégration.

tous les systèmes différentiels algébriques du second ordre. C'est ainsi qu'elle permet de déterminer toutes les équations à points critiques fixes de la forme

$$(6) \quad P(y'', y', y, x) = 0,$$

où P est un polynome en y'' , y' , du second degré en y'' , algébrique en y , x .

Quand l'ordre différentiel du système s'élève, il y a lieu de distinguer entre les deux parties de la double méthode : la première partie (recherche des conditions *nécessaires* pour que les points critiques soient fixes) s'étend d'elle-même aux équations différentielles d'ordre quelconque et fournit, presque sans calculs, des conditions très précises ; la seconde partie (discussion des conditions *suffisantes*) entraîne au contraire des complications qui croissent avec l'ordre différentiel du système.

Ces résultats, et beaucoup d'autres qui s'y rattachent, ont été exposés succinctement dans une suite de Notes des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* de Paris (1898, 1899, 1900). Ils feront l'objet de plusieurs Mémoires étendus, dont le premier va paraître dans les *Acta mathematica*. Mais comme la méthode employée s'applique à une foule de problèmes (problèmes de Mécanique, problème de M^{me} Kowalevski et analogues, inversion des différentielles totales, etc.), j'ai cru utile de détacher de ces Mémoires un exposé complet de la méthode dans le cas le plus simple.

Ce travail renferme en particulier :

1° La détermination explicite de toutes les équations à points critiques fixes qui rentrent dans la classe

$$(C) \quad y'' = a(x)y' + b(x)y^2 + c(x)y + d(x);$$

2° La démonstration des propriétés fondamentales de l'équation

$$(F) \quad y'' = 6y^2 + x;$$

3° Une première étude des conditions que doit vérifier une équation du troisième ordre (ou d'ordre supérieur) pour que ses points critiques soient fixes. Cette étude met en évidence le rôle considérable que sont appelés à jouer, dans l'étude systéma-

tique des équations différentielles à intégrale uniforme, les travaux de M. Poincaré sur les fonctions automorphes (fuchsienues et kleinéennes).

D'une manière générale, considérons un système différentiel (algébrique) quelconque, dont l'intégrale ne dépend que d'un nombre *fini* de constantes, et proposons-nous d'étudier son intégrale au point de vue de la théorie des fonctions : par exemple, de rechercher si cette intégrale est uniforme, ou ne possède qu'un nombre fini de branches, ou est dénuée de singularités transcendentes, etc. C'est à la double méthode que j'expose ici qu'il conviendra d'avoir recours. Lors même qu'on se restreint au domaine *réel*, la méthode ne perd rien de son importance. Si, par exemple, on sait montrer que les intégrales réelles d'un système différentiel réel sont dépourvues de singularités transcendentes (en même temps que de points singuliers algébriques autres que des pôles), l'intégration *quantitative* du système est effectuée; j'entends par là qu'on peut former des séries convergentes qui représentent les intégrales réelles *dans tout le champ réel*.

RECHERCHE DES CONDITIONS NÉCESSAIRES POUR QU'UNE ÉQUATION
DIFFÉRENTIELLE AIT SES POINTS CRITIQUES FIXES.

6. *Principe de la méthode.* — Considérons une équation différentielle ou un système d'équations différentielles algébriques⁽¹⁾: soit, pour fixer les idées, le système

$$(S) \quad \begin{cases} \frac{dy}{dx} = H(x, y, z), \\ \frac{dz}{dx} = K(x, y, z), \end{cases}$$

où H et K sont des fractions rationnelles en x, y, z . Pour exprimer que le système (S) a ses points critiques fixes, nous nous appuierons sur le lemme suivant :

LEMME. — *Supposons que H et K dépendent analytiquement d'un paramètre α et soient holomorphes pour $\alpha = 0$ ⁽²⁾;*

(¹) La méthode s'applique aussi bien à tout système d'équations aux dérivées partielles dont l'intégrale générale ne dépend que d'un nombre fini de constantes.

(²) Les valeurs x, y, z étant prises au hasard et non d'une façon particulière.

si l'intégrale générale du système (S) est uniforme quel que soit α (sauf peut-être pour $\alpha = 0$), elle est uniforme encore pour $\alpha = 0$, et les développements de $y(x)$, $z(x)$ suivant les puissances de α ont comme coefficients des fonctions uniformes de x .

Ce lemme bien intuitif est une conséquence immédiate d'un théorème aujourd'hui classique de M. Poincaré. Représentons, en effet, par (S_0) le système (S) où l'on a fait $\alpha = 0$, par $y(x)$, $z(x)$ la solution de (S) que définissent les conditions initiales x_0, y_0, z_0 , par $Y(x)$, $Z(x)$ la solution analogue de (S_0) . Soit enfin L un chemin fermé (partant de x_0 et y revenant), le long duquel $Y(x)$ et $Z(x)$ sont holomorphes [ainsi que $H(x, y, z)$, $K(x, y, z)$ pour $|y - Y|$, $|z - Z|$ et $|\alpha|$ petits]. Développons $y(x)$ et $z(x)$ suivant les puissances de α

$$\begin{aligned} y &= Y(x) + \alpha y_1(x) + \alpha^2 y_2(x) + \dots, \\ z &= Z(x) + \alpha z_1(x) + \alpha^2 z_2(x) + \dots; \end{aligned}$$

ces développements convergent sur L pour $|\alpha|$ inférieur à une certaine quantité positive r . Supposons qu'un des coefficients $Y(x)$, $y_1(x)$, ..., $Z(x)$, $z_1(x)$, ... [$y_i(x)$ par exemple] ne soit pas uniforme : il est loisible de choisir le contour L de façon à revenir au point x_0 avec une valeur de $y_i(x)$ différente de la valeur initiale; dans ces conditions, la fonction $y(x)$ ne saurait reprendre non plus sa valeur initiale et ne serait pas uniforme.

C. Q. F. D.

On montre de la même manière que, si le système (S) a ses points critiques fixes pour $|\alpha| < \rho$ (sauf peut-être pour $\alpha = 0$), les fonctions $Y(x)$, $y_1(x)$, ..., $Z(x)$, $z_1(x)$, ... ont, elles aussi, leurs points critiques fixes (indépendants de x_0, y_0, z_0).

7. Ce lemme établi, la méthode consiste à introduire, dans le système différentiel donné, un paramètre α tel que le nouveau système ait sûrement ses points critiques fixes en même temps que le premier, et qu'il soit *intégrable* pour $\alpha = 0$. Les fonctions $Y(x)$, $y_1(x)$, ..., $Z(x)$, $z_1(x)$, ... sont alors déterminées par des quadratures ⁽¹⁾, et, en exprimant qu'elles ont leurs points

⁽¹⁾ Rappelons les principes bien connus qui permettent d'effectuer le déve-

critiques fixes, on obtient explicitement des conditions *nécessaires*. Le système différentiel une fois simplifié par ces premières conditions, on lui applique à nouveau le même procédé, et ainsi de suite, jusqu'à ce que le procédé ne donne plus de conditions nouvelles.

Précisons sur le système (S). Soit $z = g(x_0, y_0)$ un pôle des fonctions $H(x_0, y_0, z)$, $K(x_0, y_0, z)$. En remplaçant $z - g(x, y)$ par Z , il est loisible de supposer $g(x, y) \equiv 0$, et d'écrire (S) sous la forme

$$(7) \quad z^m \frac{dy}{dx} = H_0(x, y) + z H_1(x, y) + \dots, \quad z^n \frac{dz}{dx} = K_0(x, y) + z K_1(x, y) + \dots,$$

loppement de $y(x)$, $z(x)$ suivant les puissances de x . Soit

$$(\Sigma) \quad y = F(x, h, k, \alpha), \quad z = G(x, h, k, \alpha)$$

l'intégrale générale de (S), où h, k désignent les constantes arbitraires (par exemple les valeurs de y, z pour $x = x_0$).

Les fonctions $F(\alpha)$, $G(\alpha)$ les plus générales qui représentent l'intégrale de (S) s'obtiennent en remplaçant, dans (Σ) , h et k par des fonctions arbitraires de α , soient

$$h = h_0 + \alpha \frac{h'_0}{1!} + \frac{\alpha^2}{2!} h''_0 + \dots, \quad k = k_0 + \alpha \frac{k'_0}{1!} + \frac{\alpha^2}{2!} k''_0 + \dots$$

Développons F et G suivant les puissances de α , en posant (pour simplifier)

$$F(x, h, k, 0) = \varphi(x, h_0, k_0), \quad \left[\frac{\partial F}{\partial \alpha}(x, h_0, k_0, \alpha) \right]_{\alpha=0} = \varphi_1(x, h_0, k_0), \dots$$

$$G(x, h_0, k_0, 0) = \psi(x, h_0, k_0), \quad \left[\frac{\partial G}{\partial \alpha}(x, h_0, k_0, \alpha) \right]_{\alpha=0} = \psi_1(x, h_0, k_0), \dots;$$

il vient

$$\begin{aligned} F(x, h, k, \alpha) &= \varphi + \alpha \left(\frac{\partial \varphi}{\partial h_0} h'_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial k_0} k'_0 + \varphi_1 \right) \\ &\quad + \frac{\alpha^2}{1.2} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial h_0} \frac{h''_0}{2} + \frac{\partial \varphi}{\partial k_0} \frac{k''_0}{2} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial h_0} h'_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial k_0} k'_0 \right)_1 \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial h_0} h'_0 + 2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial k_0} k'_0 + \varphi_2 \right] + \dots \\ &\equiv \varphi + \alpha \Phi_1 + \alpha^2 \Phi_2 + \dots, \\ G(x, h, k, \alpha) &\equiv \psi + \alpha \left(\frac{\partial \psi}{\partial h_0} h'_0 + \frac{\partial \psi}{\partial k_0} k'_0 + \psi_1 \right) \\ &\quad + \frac{\alpha^2}{1.2} \left[\frac{\partial \psi}{\partial h_0} \frac{h''_0}{2} + \frac{\partial \psi}{\partial k_0} \frac{k''_0}{2} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial h_0} h'_0 + \frac{\partial \psi}{\partial k_0} k'_0 \right)_1 \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{\partial \psi_1}{\partial h_0} h'_0 + 2 \frac{\partial \psi_1}{\partial k_0} k'_0 + \psi_2 \right] + \dots \\ &\equiv \psi + \alpha \Psi_1 + \alpha^2 \Psi_2 + \dots \end{aligned}$$

On voit que les couples successifs de coefficients (Φ_1, Ψ_1) , (Φ_2, Ψ_2) , ... renferment chacun (et sous forme linéaire) deux nouvelles constantes (h'_0, k'_0) , (h''_0, k''_0) , ...

les seconds membres étant holomorphes et différents de zéro pour $z = 0$, et l'un au moins des entiers m, n étant positif ⁽¹⁾.

Je dis d'abord que, si $m < n + 1$, le système (S) a des points critiques mobiles ⁽²⁾. Posons, en effet,

$$(8) \quad x = x_0 + \alpha^{n+1} X, \quad y = y_0 + \alpha^{n+1-m} Y, \quad z = \alpha Z;$$

le système (S) devient ⁽³⁾

$$(S') \quad z^m \frac{dy}{dx} = H_0(x_0, y_0) + \alpha(\dots), \quad z^n \frac{dz}{dx} = K_0(x_0, y_0) + \alpha(\dots).$$

En vertu de la transformation (8), (S') a ses points critiques fixes en même temps que (S) (sauf peut-être pour $\alpha = 0$); pour $\alpha = 0$, le système (S') se réduit au suivant :

$$z^m \frac{dy}{dx} = \eta_0, \quad z^n \frac{dz}{dx} = \kappa_0 \quad [\eta_0 = H_0(x_0, y_0), \quad \kappa_0 = K_0(x_0, y_0)],$$

système dont l'intégrale $z = [(n+1)k_0 x + \text{const.}]^{\frac{1}{n+1}}$ a un point critique mobile (n étant positif). En vertu du lemme, (S) ne saurait avoir ses points critiques fixes.

et vérifient, par suite, un système de deux équations linéaires

$$(\sigma_i) \quad \frac{d\Phi_i}{dt} + p(x)\Phi_i + q(x)\Psi_i = u_i(x), \quad \frac{d\Psi_i}{dx} + r(x)\Phi_i + s(x)\Psi_i = v_i(x) \\ (i = 1, 2, 3, \dots),$$

où les fonctions p, q, r, s sont indépendantes de l'indice i , tandis que les seconds membres u_i, v_i s'expriment à l'aide des fonctions Φ, Ψ , d'indice inférieur à i . L'intégrale du système linéaire sans seconds membres est

$$\Phi_i = \frac{\partial \varphi}{\partial h_0} a + \frac{\partial \varphi}{\partial k_0} b, \quad \Psi_i = \frac{\partial \psi}{\partial h_0} a + \frac{\partial \psi}{\partial k_0} b, \quad (a, b \text{ const. arbitraires}),$$

et l'intégrale du système (σ_i) s'obtient par quadratures, d'après la méthode de la variation des constantes. Pour former explicitement chaque système (σ_i) , il suffit de remplacer y par $\varphi + \alpha\Phi_1 + \dots$, z par $\psi + \alpha\Psi_1 + \dots$ dans (S), et d'égaliser les coefficients des mêmes puissances de α dans les deux membres.

⁽¹⁾ D'une manière systématique et pour ne pas compliquer les notations, une fois le changement de variable effectué, nous supposons qu'on écrit, dans le nouveau système, x, y, z à la place de X, Y, Z .

⁽²⁾ Cette proposition est bien facile à établir directement (voir, par exemple, mes *Leçons de Stockholm*, p. 421-427).

⁽³⁾ Je représente par le symbole $\alpha(\dots)$ une fonction de $\alpha, x, y, z, x_0, y_0$ qui, pour $\alpha = 0$ (et pour x, y, z, x_0, y_0 pris au hasard) est holomorphe et nulle. Pour $\alpha = 0$ et pour des valeurs exceptionnelles de x_0, y_0 , cette fonction peut être ici de la forme $\frac{0}{0}$.

Soit donc $m \geq n + 1$. On peut supposer $n = m - 1$, à condition d'admettre que, dans les équations (7), $K_0(x, y)$ peut être identiquement nul. La transformation

$$(9) \quad x = x_0 + \alpha^m X, \quad z = \alpha Z$$

substitue à (S) le système

$$(S') \quad z^m \frac{dy}{dx} = H_0(x_0, y) + \alpha(\dots), \quad z^{m-1} \frac{dz}{dx} = K_0(x_0, y) + \alpha(\dots);$$

pour $\alpha = 0$, ce système se réduit au système *intégrable*

$$z^m \frac{dy}{dx} = \eta(y), \quad z^{m-1} \frac{dz}{dx} = \chi(y), \quad [\eta = H_0(x_0, y), \quad \chi = K_0(x_0, y)],$$

système qui peut s'écrire :

$$z = e^{\int \frac{\chi(y)}{\eta(y)} dy}, \quad x = \int \frac{z^m dy}{\eta(y)}.$$

Ce système doit avoir son intégrale uniforme. Plus généralement, si l'on développe l'intégrale $y(x)$, $z(x)$ de (S') suivant les puissances de α , les coefficients sont des fonctions de x données par des *quadratures*; il faut que ces fonctions aient leurs points critiques fixes.

Ces conditions doivent être appliquées à tous les pôles $z = g(y, x)$ [ou $y = h(x)$] des coefficients différentiels de (S), ainsi qu'aux valeurs $z = \infty$ (ou $y = \infty$) à l'aide de la transformation $z = \frac{1}{Z}$ (ou $y = \frac{1}{Y}$).

8. Ces premières conditions obtenues, on considère les valeurs $y = g(x)$, $z = h(x)$ qui donnent aux coefficients différentiels la forme $\frac{0}{0}$, valeurs qu'on peut toujours supposer finies et identiquement nulles. On pose alors

$$x = x_0 + \alpha^i X, \quad y = \alpha^j Y, \quad z = \alpha^l Z,$$

en choisissant les entiers positifs i, j, l de façon que les nouveaux coefficients différentiels soient holomorphes pour $\alpha = 0$. Pour $\alpha = 0$, le système (S'') ainsi obtenu est *intégrable*; car il ne change pas quand on lui applique la transformation précédente où x_0 et α sont arbitraires : si donc un des entiers j, l est nul, soit j , la

fonction $x(y)$ est donnée par les quadratures $x = \int dy e^{\int \rho(y) dy}$ où ρ est connu algébriquement; si ni j ni l ne sont nuls, on pose $u = \frac{y^l}{z^j}$, et $x(u)$ est donné par les quadratures $x(u) = \int du e^{\int \rho(u) du}$. Il faut exprimer que, dans le développement de l'intégrale de (S''') suivant les puissances de α , les coefficients (qui sont donnés par des quadratures) ont leurs points critiques fixes.

Quand les coefficients différentiels H et K de (S) sont non plus rationnels mais *algébriques* en x, y, z , les mêmes procédés doivent être étendus aux singularités algébriques de H, K .

APPLICATION DE LA MÉTHODE AUX ÉQUATIONS

$$y'' = R(x, y, y').$$

9. Appliquons la méthode précédente aux équations

$$(1) \quad y'' = R(x, y, y') \equiv \frac{P(x, y, y')}{Q(x, y, y')}$$

où $R \equiv \frac{P}{Q}$ désigne une fraction rationnelle irréductible en y, y' ; x figure analytiquement.

Pour que l'équation (1) ait ses points critiques fixes, il faut d'abord (comme il est bien connu) que R soit un polynôme en y' du second degré au plus ⁽¹⁾; soit donc

$$(E) \quad y'' = L(x, y)y'^2 + M(x, y)y' + N(x, y),$$

où L, M, N sont des fractions rationnelles de y analytiques en x .

Ce point admis, posons $x = x_0 + \alpha X$; l'équation devient

$$(E') \quad y'' = L(x_0, y)y'^2 + \alpha(\dots).$$

Pour que l'équation (E) ait ses points critiques fixes, *il faut donc que l'équation*

$$(e) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = l(y) \left(\frac{dy}{dx} \right)^2, \quad [l(y) \equiv L(x_0, y)]$$

ait son intégrale générale uniforme.

(¹) Voir, par exemple, mes *Leçons de Stockholm* (p. 396-409).

Ces premiers résultats rentrent au fond dans ceux du n° 7. Tout d'abord, pour voir que R est un polynome en y' , il suffit d'écrire l'équation (1) sous la forme :

$$\frac{dy}{dx} = z, \quad \frac{dz}{dx} = R(x, y, z)$$

et d'appliquer la condition $n \leq m - 1$ aux pôles $z = g(x, y)$ de R ; m étant nul ici, cette condition ne peut être vérifiée si ces pôles existent; R est donc un polynome en y' .

Pour voir ensuite que ce polynome est du second degré au plus, il suffit d'écrire l'équation (1) sous la forme

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{z}, \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{1}{z^{q-1}}[L(x, y) + z(\dots)],$$

q désignant le degré de R en y' . Appliquons encore la condition $n \leq m - 1$; ici, $m = 1$, $n = q - 2$; donc q est égal ou inférieur à 2. De plus, la transformation (9) du n° 7 est ici

$$x = x_0 + \alpha X, \quad z = \alpha Z,$$

et le système auquel elle conduit se réduit, pour $\alpha = 0$, au système

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{z}, \quad \frac{dz}{dx} = L(x_0, y)$$

qui équivaut à l'équation (e).

Un problème préliminaire s'impose donc : *Déterminer toutes les équations (e) dont l'intégrale est uniforme.*

10. Détermination de toutes les équations $y'' = y'^2 l(y)$, dont l'intégrale générale est uniforme.

Il est facile de résoudre ce problème en le ramenant à la détermination de groupes *fuchsien*s particulièrement simples; il suffit de remarquer que l'intégrale générale d'une équation (e) est de la forme $y = F(Cx + C_1)$, C et C_1 désignant deux constantes arbitraires. Mais nous n'aurons recours ici qu'aux principes de la méthode développée au n° 7.

Je montrerai d'abord que *la fonction $l(y)$ n'a que des pôles simples.*

Soit, en effet, $y = h$ un pôle d'ordre i de $l(y)$. Il est loisible,

en augmentant y de h , de supposer $h = 0$. Écrivons l'équation (e) ainsi :

$$\frac{dy}{dx} = z, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{z^2}{y^i} [k + y(\dots)], \quad (i > 1);$$

la transformation

$$y = \alpha Y, \quad z = \alpha^i Z$$

substitue à ce système le suivant

$$(e') \quad \frac{dY}{dX} = \alpha^{(i-1)} z, \quad \frac{dZ}{dX} = \frac{Z^2}{Y^i} [k + \alpha(\dots)].$$

Ordonnons l'intégrale $y(x)$, $z(x)$ de ce dernier système suivant les puissances de α ; il vient

$$y = y_0 - \frac{\alpha^{(i-1)}}{k} y_0^i \log \left(\frac{x + C}{x_0 + C} \right) + \dots, \\ z = \frac{-y_0^i}{k(x + C)} + \alpha(\dots), \quad \left(C = -x_0 - \frac{y_0^i}{z_0 k} \right).$$

L'équation (e) ne peut donc avoir ses points critiques fixes si i est plus grand que 1. C. Q. F. D.

Si $i = 1$, le système (e') se réduit, pour $\alpha = 0$, au système

$$\frac{dy}{dx} = z, \quad \frac{dz}{dx} = k \frac{z^2}{y},$$

qui s'intègre aussitôt et dont l'intégrale générale peut s'écrire

$$y = (Cx + C')^{\frac{1}{1-k}} \quad (\text{si } k \neq 1) \quad \text{et} \quad y = e^{Cx + C'} \quad (\text{si } k = 1).$$

Pour que la fonction $y(x)$ ainsi définie soit uniforme, *il faut donc que k soit égal à 1 ou $1 + \frac{1}{n}$ (n désignant un entier positif ou négatif).*

Ceci posé, remarquons que l'équation (e) équivaut à l'égalité

$$\frac{dx}{dy} = C e^{-\int l(y) dy};$$

d'après ce qui précède, la fonction $l(y)$ ne peut avoir que des pôles simples à résidus commensurables; soit ν le plus petit dénominateur commun de ces résidus : la fonction $e^{-\int l(y) dy}$ est la racine

$y^{\text{ème}}$ d'une fonction méromorphe $\Phi(y)$. D'autre part, la transformation $y = \frac{1}{Y}$, appliquée à l'équation (e), montre aussitôt que la fonction $-\frac{1}{Y^2} \Phi\left(\frac{1}{Y}\right)$, donc aussi $\Phi\left(\frac{1}{Y}\right)$, est méromorphe pour $Y = 0$. Il suit de là que $\Phi(y)$ est une fonction rationnelle de y , et l'on est ramené ainsi au problème suivant :

Déterminer toutes les équations

$$(10) \quad y^v = \rho(y)$$

(où ρ est rationnel en y) dont l'intégrale est uniforme.

Or ce problème a été résolu explicitement par Briot et Bouquet. Si l'on connaît une telle équation (10), son intégrale reste uniforme quand on multiplie $\rho(y)$ par une constante quelconque (car cela revient à multiplier x par une constante) : en prenant la dérivée logarithmique des deux membres de (10), on obtient une équation (e) à intégrale uniforme, à savoir l'équation

$$v y^v = y^v \frac{\rho'(y)}{\rho(y)}.$$

Il suffit donc d'épuiser tous les types énumérés par Briot et Bouquet pour obtenir toutes les équations (e) cherchées. On trouve ainsi que $l(y)$ coïncide nécessairement avec une des expressions suivantes ⁽¹⁾ :

$$(T) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0, \quad \frac{2a}{ay+b}, \quad \frac{a\left(1+\frac{1}{n}\right)}{ay+b} + \frac{c\left(1-\frac{1}{n}\right)}{cy+d}, \quad (n \text{ entier} > 1), \\ \frac{a}{ay+b} + \frac{c}{cy+d}, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{a}{ay+b} + \frac{c}{cy+d} \right) + \frac{e}{ey+f}, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{a}{ay+b} + \frac{c}{cy+d} + \frac{e}{ey+f} + \frac{g}{gy+h} \right), \\ \frac{2}{3} \left(\frac{a}{ay+b} + \frac{c}{cy+d} + \frac{e}{ey+f} \right), \\ \frac{1}{2} \frac{a}{ay+b} + \frac{3}{4} \left(\frac{c}{cy+d} + \frac{e}{ey+f} \right), \\ \frac{5}{6} \frac{a}{ay+b} + \frac{2}{3} \frac{c}{cy+d} + \frac{1}{2} \frac{e}{ey+f}; \end{array} \right.$$

(¹) Le même procédé permet de résoudre aussi aisément la question en suppo-

les $a, b, \dots, h$ sont des quantités quelconques qui peuvent être nulles.

Il suit de là que si une équation

$$(E) \quad y'' = L(x, y)y'^2 + M(x, y)y' + N(x, y)$$

a ses points critiques fixes, L coïncide nécessairement avec une des expressions du Tableau (T), où les $a, b, \dots, h$ sont des fonctions de x .

11. Étude de l'équation (E) dans le voisinage d'un pôle $y = h(x)$ de L, M, N .

Je vais établir maintenant que les pôles $y = h(x)$ des fonctions M et N de y coïncident nécessairement avec ceux de L et sont tous simples.

Supposons, en effet, que $y = h(x)$ soit pôle d'ordre i pour L ($i = 1$ ou 0), d'ordre j pour M , d'ordre k pour N , un au moins des entiers j, k étant plus grand que i . En augmentant y de h , il est loisible de supposer $h \equiv 0$, et (dans le voisinage du pôle considéré) d'écrire l'équation sous la forme

$$(E_1) \quad y'' = \frac{y'^2}{y} \left[\left(1 - \frac{1}{n} \right) + y(\dots) \right] + \frac{y'}{y^j} [M(x, 0) + y(\dots)] + \frac{1}{y^k} [N(x, 0) + y(\dots)];$$

n désigne un entier positif ou négatif, qui peut être infini, mais non nul; n est égal à 1, si i est nul.

Posons

$$y = \alpha Y, \quad x = x_0 + \alpha^j X, \quad \text{si} \quad k \leq 2j - 1,$$

et

$$y = \alpha Y, \quad x = x_0 + \alpha^{\frac{1+k}{2}} X, \quad \text{si} \quad k \geq 2j - 1;$$

les deux transformations se confondent si $k = 2j - 1$.

L'équation (E₁) devient :

$$(11) \quad y'' = \frac{y'^2}{y} \left(1 - \frac{1}{n} \right) + M_0 \frac{y'}{y^j} + \alpha(\dots), \quad \text{si} \quad k < 2j - 1,$$

$$(12) \quad y'' = \frac{y'^2}{y} \left(1 - \frac{1}{n} \right) + \frac{N_0}{y^k} + \alpha^{\frac{1}{2}}(\dots), \quad \text{si} \quad k > 2j - 1,$$

sant $l(y)$ non plus rationnel, mais algébrique en y . Ce problème a été résolu explicitement par M. Picard, avec la restriction que $e^{\int l(y) dy}$ ne présente pas de singularités transcendentes (*Journal de Liouville*, 1889, 4^e série, t. V, p. 300-319; *American Journal*, 1894, t. XVI, p. 111-122; *Traité d'Analyse*, t. III, p. 66-80).

et

$$(13) \quad y'' = \frac{y'^2}{y} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + M_0 \frac{y'}{y^j} + \frac{N_0}{y^{2j-1}} + \alpha(\dots), \quad \text{si } k = 2j - 1,$$

$$[M_0 = M(x_0, 0), \quad N_0 = N(x_0, 0)].$$

Pour $\alpha = 0$, l'équation (13) comprend les deux précédentes à condition d'admettre que, si M_0 est nul, j n'est pas nécessairement un entier, mais que $2j$ est un entier ≥ 2 . Il me suffit donc de montrer que l'équation

$$(14) \quad y'' = \frac{y'^2}{y} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + M_0 \frac{y'}{y^j} + \frac{N_0}{y^{2j-1}}$$

[où une au moins des quantités M_0 , N_0 n'est pas nulle] n'a son intégrale uniforme que si l'on a $j = 1$, avec $n \neq 1$.

Remarquons d'abord que la transformation

$$y = \alpha Y, \quad x = x_0 + \alpha X,$$

conserve l'équation (14) (voir le n° 8); dans cette transformation, on a

$$\frac{dx}{dy} y^{1-j} \equiv \frac{dX}{dY} Y^{1-j}.$$

Si l'on pose $u = \frac{dx}{dy} y^{1-j}$, toutes les fonctions $u(y)$ définies par (14) seront de la forme $u_1(Cy)$, c'est-à-dire que $u(y)$ est donné par une équation de la forme

$$\varphi(u) du = \frac{dy}{y}.$$

C'est ce que vérifie aussitôt un calcul élémentaire : l'équation (14) équivaut au système

$$(15) \quad \frac{du}{u \left[j - \frac{1}{n} + M_0 u + N_0 u^2 \right]} = - \frac{dy}{y},$$

$$(16) \quad \frac{dx}{dy} = u y^{j-1}.$$

Cela étant, soit d'abord $j > 1$. L'équation (15) [où j est différent de $\frac{1}{n}$] admet au moins une solution $u = C$, où la constante C n'est pas nulle; la fonction $y(x)$, définie par $dx = C y^{j-1} dy$,

n'est pas uniforme; l'intégrale générale de (14), *a fortiori*, n'est pas uniforme.

Soit maintenant $j = 1$, avec $n = 1$. Écrivons l'équation (14) ainsi :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u}, \quad \frac{du}{dx} = -\frac{u(M_0 + N_0 u)}{y},$$

et faisons le changement de variables

$$u = \alpha U, \quad x = \alpha X;$$

le système considéré devient

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u}, \quad \frac{du}{dx} = -\frac{\alpha u(M_0 + N_0 \alpha u)}{y},$$

et si l'on développe l'intégrale $y(x)$, $u(x)$ de ce nouveau système suivant les puissances de α , on trouve

$$y = y_0 + \frac{x - x_0}{u_0} + \alpha(\dots)$$

avec

$$u = u_0 - \alpha M_0 u_0^2 \log \left(y_0 + \frac{x - x_0}{u_0} \right) + \dots, \quad \text{si } M_0 \neq 0,$$

ou

$$u = u_0 - \alpha^2 N_0 u_0^3 \log \left(y_0 + \frac{x - x_0}{u_0} \right), \quad \text{si } M_0 = 0.$$

L'intégrale de (14) n'est donc pas uniforme.

J'ai bien établi ainsi que l'intégrale de (14) n'est uniforme que si l'on a $j = 1$, $n \neq 1$. Autrement dit, tout pôle $y = h$ de M ou de N est nécessairement du premier ordre et coïncide avec un pôle de L .

C. Q. F. D.

12. Ce résultat est d'une extrême importance : CAR IL LIMITE LE DEGRÉ DE M ET DE N EN y . En effet, si D est le dénominateur de L , on a

$$M = \frac{\mu}{D}, \quad N = \frac{\nu}{D},$$

μ et ν étant des polynômes en y . D'autre part, posons $y = \frac{1}{Y}$; l'équation (E) devient

$$Y'' = \frac{Y'}{Y} \left[2 - \frac{L\left(x, \frac{1}{Y}\right)}{Y} \right] + Y' M\left(x, \frac{1}{Y}\right) - Y^2 N\left(x, \frac{1}{Y}\right).$$

Deux cas sont à distinguer : Si L est identiquement nul, ou si L coïncide avec une des expressions (T) pour lesquelles une des quantités a, c, e, g est nulle, le coefficient de $Y^{1/2}$ admet le pôle simple $Y = 0$; les degrés de $\mu(x, y)$ et $\nu(x, y)$ peuvent alors surpasser le premier d'une unité, le second de trois unités, le degré q de D . Si, au contraire, L coïncide avec une expression (T) où les quantités a, c, b, g sont différentes de zéro, $Y = 0$ n'est pas un pôle du coefficient de $Y^{1/2}$, et les degrés de μ et de ν sont au plus égaux le premier à q , le second à $q + 2$. De la discussion des nos 10 et 11, il suit donc que les degrés de D , de μ et de ν en y sont au plus égaux respectivement à 4, 4 et 6.

Mais les conditions fournies par l'étude de l'équation (E) dans le voisinage d'un pôle $y = h(x)$ du coefficient différentiel, sont loin d'être épuisées.

Considérons, en effet, l'équation (13) où $j = k = 1$ (avec $n \neq 1$), à savoir l'équation

$$y'' = \frac{y'^2}{y} \left(1 - \frac{1}{n} \right) + M_0 \frac{y'}{y} + \frac{N_0}{y} + \alpha(\dots) \quad (n \neq 1);$$

cette équation est intégrable pour $\alpha = 0$, et si l'on développe $y(x)$ suivant les puissances de α , les coefficients du développement sont donnés par des *quadratures*. Ces coefficients doivent être des fonctions de x à points critiques fixes.

Les conditions ainsi obtenues doivent être appliquées à tous les pôles $y = h(x)$ de L [le point $y = \infty$ compris, grâce à la transformation $y = \frac{1}{Y}$].

13. Explicitons ces conditions dans le cas où L coïncide avec la plus simple des expressions (T), à savoir $L \equiv 0$. Alors l'équation (E) est nécessairement de la forme

$$(17) \quad y'' = y' [a(x)y + b(x)] + A(x)y^3 + B(x)y^2 + C(x)y + D(x).$$

Observons aussitôt que la transformation $y = \frac{Y}{\sqrt{-A}}$ donne à A la valeur -1 (si $A \neq 0$), et que la transformation $y = \frac{-2}{a} Y$ donne à $a(x)$ la valeur -2 (si $a \neq 0$) (1).

(1) Ces valeurs numériques sont choisies pour apporter quelques simplifications dans des calculs ultérieurs.

Au lieu d'employer la transformation $y = \frac{1}{Y}$, posons directement

$$y = \frac{Y}{\alpha}, \quad x = x_0 + \alpha X;$$

l'équation (17) prend la forme

$$y'' = \alpha(x_0)yy' + \Lambda(x_0)y^3 + \alpha(\dots),$$

équation qui, pour $\alpha = 0$, devient

$$y'' = a_0yy' + \Lambda_0y^3 \quad a_0 = a(x_0), \Lambda_0 = \Lambda(x_0)];$$

cette dernière équation équivaut au système

$$(18) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{u}, \quad \frac{du}{dx} = (2 - a_0u - \Lambda_0u^2)y.$$

Tout d'abord, si Λ_0 est nul, l'équation $y'' = a_0yy'$, qui entraîne l'égalité $2y' = a_0y^2 + \text{const.}$, a son intégrale uniforme.

Soit maintenant $\Lambda_0 \neq 0$. Il est loisible de supposer $\Lambda_0 = -1$. Le système (18) peut s'écrire

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{u}, \quad \frac{du}{dx} = (u - h)(u - k)y, \quad [hk = 2].$$

Posons $u = h + \alpha v$; il vient

$$(19) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{h + \alpha v}, \quad \frac{dv}{dx} = v[h - k + \alpha v]y.$$

Si $h \neq k$, le système (pour $\alpha = 0$) s'intègre ainsi

$$y = \frac{-h}{x + c}, \quad v = c_1(x + c)^{-h(h-k)} = c_1(x + c)^{2-h^2}$$

(c et c_1 constantes arbitraires);

pour que cette intégrale soit uniforme, il faut que $(2 - h^2)$ soit un entier n positif ou négatif, mais différent de zéro [car $(2 - h^2) = \frac{k-h}{h}$ ne peut être nul si $h \neq k$]. On doit avoir, de même, $k^2 = 2 - n'$, et par suite

$$4 = k^2h^2 = (2 - n)(2 - n') \quad [n, n' \neq 0].$$

Cette égalité entraîne

$$\text{soit } \begin{cases} 2-n=1, \\ 2-n'=4, \end{cases} \quad \text{soit } \begin{cases} 2-n=-1, \\ 2-n'=-4, \end{cases} \quad \text{soit } \begin{cases} 2-n=-2, \\ 2-n'=-2. \end{cases}$$

De là résultent, pour h et $a_0 \equiv h + \frac{2}{h}$, les valeurs

$$\begin{aligned} h = \pm 1, & \quad a_0 = \pm 3; \\ h = \pm i, & \quad a_0 = \mp i; \\ h = i\sqrt{2}, & \quad a_0 = 0. \end{aligned}$$

La transformation $y = -Y$ ramène le cas de $a_0 = +3$ au cas de $a_0 = -3$; si $a_0 = \pm i$, la transformation $y = \pm iY$ donne à a_0 la valeur -1 et à A_0 la valeur $+1$; si donc A est différent de zéro, il est loisible de se borner aux cas où A et a ont les valeurs suivantes

$$A = -1, \quad a = -3; \quad A = +1, \quad a = -1; \quad A = -1, \quad a = 0.$$

Nous avons toutefois laissé de côté l'hypothèse où h et k seraient égaux. Le système (19) s'écrit alors

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{h + av}, \quad \frac{dv}{dx} = av^2y.$$

Développons $y(x)$ et $v(x)$ suivant les puissances de a ; on trouve

$$y = \frac{-h}{x+c} + a(\dots), \quad v = c_1 - ac\{h \log(x+c) + \dots$$

(c, c_1 constantes arbitraires).

L'intégrale de (19) n'est donc pas uniforme : l'hypothèse est à rejeter.

En définitive, moyennant une transformation $y = \lambda(x)Y$ (où λ est connu algébriquement à l'aide des coefficients a, A), on peut faire coïncider les coefficients a, A avec un des systèmes suivants

$$\begin{aligned} a = 0, & \quad A = 0, \\ a = -2, & \quad A = 0, \\ a = -3, & \quad A = -1, \\ a = -1, & \quad A = +1, \\ a = 0, & \quad A = -1. \end{aligned}$$

Parmi les équations que nous sommes amenés ainsi à considérer, la classe la plus simple est donc de la forme

$$(C) \quad y'' = b(x)y' + B(x)y^2 + C(x)y + D(x).$$

Je me bornerai, dans ce Mémoire, à épuiser l'étude de cette classe d'équations. La méthode qui s'applique à toutes les autres classes ne diffère d'ailleurs de celle que je vais suivre que par des complications de calculs.

14. Détermination de toutes les équations (C) à points critiques fixes. — Je remarque d'abord qu'une équation (C) garde sa forme dans le changement de variables :

$$(20) \quad y = \lambda(x)Y + \mu(x), \quad X = \varphi(x);$$

l'équation devient

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Y}{dX^2} = \frac{dY}{dX} \frac{1}{\varphi'} \left[b - \frac{2\lambda'}{\lambda} - \frac{\varphi''}{\varphi'} \right] + Y^2 \frac{B\lambda}{\varphi'^2} + \frac{Y}{\varphi'^2} \left[C + 2B\mu + \frac{b\lambda'}{\lambda} - \frac{\lambda''}{\lambda} \right] \\ + \frac{1}{\lambda\varphi'^2} [D + C\mu + B\mu^2 + b\mu' - \mu''], \end{aligned}$$

où x doit être remplacé en fonction de X .

Si $B \neq 0$, on peut disposer de λ , μ , φ de façon que le coefficient de Y^2 , dans la nouvelle équation, soit numérique, égal à 6 par exemple ⁽¹⁾, et que, de plus, les coefficients de Y' et de Y soient nuls. Ces conditions se traduisent par les égalités

$$\frac{\varphi''}{\varphi'} + \frac{2\lambda'}{\lambda} = b, \quad \frac{B\lambda}{\varphi'^2} = 6, \quad \mu = \frac{1}{2B} \left[\frac{\lambda''}{\lambda} - \frac{b\lambda'}{\lambda} - C \right],$$

c'est-à-dire

$$(21) \quad \begin{cases} \lambda = B^{-\frac{1}{6}} e^{\frac{1}{6} \int b(x) dx}, \\ X = \frac{1}{\sqrt{6}} \int B^{\frac{1}{2}} \lambda^{\frac{1}{2}} dx, \\ 2B\mu = -C + \frac{1}{5} \left[2b' - \frac{B''}{B} + \frac{6}{5} \left(\frac{B'^2}{B^2} - b^2 \right) + \frac{1}{5} \frac{bB'}{B} \right]. \end{cases}$$

Si $B \equiv 0$, l'équation (C) est *linéaire* et se laisse ramener par

⁽¹⁾ Le choix de ce coefficient numérique a pour effet de simplifier quelques calculs ultérieurs.

une transformation (20) à la forme

$$\frac{d^2 Y}{dX^2} = 0.$$

En définitive, la transformation (20) permet de substituer à l'équation (C) une des deux équations

$$y'' = 6y^2 + S(x), \quad y' = 0,$$

15. Je vais montrer maintenant que l'équation

$$(C') \quad y'' = 6y^2 + S(x),$$

ne peut avoir ses points critiques fixes que si $S(x)$ est linéaire en x .

A cet effet, j'introduis la transformation

$$(22) \quad y = \frac{Y}{\alpha^2}, \quad x = a + \alpha X,$$

qui substitue à (C') l'équation

$$(e') \quad y'' = 6y^2 + \alpha^4 S(a) + \alpha^6 x S'(a) + \alpha^8 x^2 \frac{S''(a)}{1.2} + \dots,$$

et je développe l'intégrale de (e') suivant les puissances de α .

Appliquons, pour cela, le méthode classique rappelée au n° 7. On trouve aussitôt

$$y = \varphi + \alpha^4 \psi + \alpha^6 \chi + \alpha^8 \tau + \dots$$

avec

$$\begin{aligned} \varphi'' &= 6\varphi^2 & \psi'' - 12\varphi\psi &= S(a), & \chi'' - 12\varphi\chi &= xS'(a), \\ \tau'' - 12\varphi\tau &= \frac{x^2}{2} S''(a) + \dots \end{aligned}$$

L'intégrale générale de l'équation

$$\varphi'' = 6\varphi^2$$

vérifie l'égalité

$$\varphi'^2 = 4\varphi^3 - h,$$

et peut s'écrire

$$\varphi = p(x + k, 0, h), \quad (k \text{ et } h \text{ constantes arbitraires}).$$

L'intégrale de l'équation

$$\psi'' - 12p(x + k, 0, h)\psi = 0$$

est, nous le savons (voir p. 210, note 1),

$$C_1 \frac{\partial \varphi}{\partial h} + C_2 \frac{\partial \varphi}{\partial k} \equiv C_1(xp' + 2p) + C_2p' \quad \left[p' = \frac{\partial p}{\partial x} \right].$$

Calculons immédiatement le coefficient τ défini par l'équation

$$\tau'' - {}_{12}p(x+k, 0, h)\tau = x^2 \frac{S''(a)}{2};$$

la méthode de la variation des constantes donne

$$\tau = C_1(xp' + 2p) + C_2p',$$

avec

$$C_1'(xp' + 2p) + C_2'p' = 0,$$

$$C_1'(xp'' + 3p') + C_2'p'' = x^2 \frac{S''(a)}{2};$$

d'où l'on tire aussitôt

$${}_{12}C_1' = \frac{S''(a)}{2} x^2 p', \quad {}_{12}C_2' = \frac{S''(a)}{2} x^2 (xp' + 2p).$$

Les fonctions $x^2 p'$, $x^2 (xp' + p)$ admettent comme pôle le point $x = -k$, et le résidu de ce pôle est égal à -2 pour la première, à $+2k$ pour la seconde; on a donc

$$C_1 = \frac{S''(a)}{{}_{12}} \log(x+k) + \dots, \quad C_2 = \frac{S''(a)}{{}_{12}} k \log(x+k) + \dots,$$

$$\tau = \frac{S''(a)}{{}_{12}} \log(x+k) [(k-x)p' - 2p] + \dots,$$

les termes non écrits étant méromorphes dans le domaine de $x = -k$. Pour que τ soit lui-même méromorphe, il faut que $S''(a)$ soit nul, et comme ceci doit avoir lieu quel que soit a , il faut que $S(x)$ soit égal à $px + q$, p et q étant des constantes numériques.

C. Q. F. D.

16. Toutes les équations (C') à points critiques fixes se laissent donc ramener, par une transformation (20), à l'une des deux formes

$$y'' = 0, \quad y'' = 6y^2 + px + q.$$

La transformation (22) permet d'ailleurs de donner à q la valeur 0 et à p la valeur 1 (si $p \neq 0$), ou à q la valeur $\frac{1}{2}$ si $p = 0$, mais si $q \neq 0$. Les équations à étudier se réduisent ainsi aux

suivantes :

$$(23) \quad y' = 0, \quad y' = 6y^2, \quad y' = 6y^2 + \frac{1}{2}, \quad y' = 6y^2 + x.$$

Les trois premières s'intègrent aussitôt et donnent pour y les fonctions uniformes

$$y = hx + k, \quad y = p(x + k, 0, h), \quad y = p(x + k, 1, h);$$

il reste à étudier l'équation

$$y' = 6y^2 + x.$$

Auparavant, je ferai une remarque au sujet de la réduction d'une équation donnée (C) à une des formes (23). On peut toujours reconnaître, à l'aide d'un nombre fini d'opérations algébriques (¹), si une équation donnée (C) se laisse ramener par un changement de variables (20) à un des types (23). Tout d'abord, si l'équation (E₁) correspond au type $Y'_X = 0$, elle est linéaire. Pour qu'elle corresponde à un des trois types

$$Y'_X = 6Y^2 + S \quad [S \equiv 0, \text{ ou } \frac{1}{2}, \text{ ou } X],$$

il faut et il suffit que les équations (21) soient compatibles avec la condition

$$(24) \quad D + C\mu + B\mu^2 + b\mu' - \mu'' = S\lambda \left(\frac{dX}{dx} \right)^2 \quad [S \equiv 0, \text{ ou } \frac{1}{2}, \text{ ou } X],$$

ce qu'on sait vérifier et ce qui se traduit par une relation algébrique entre b , B , C , D et leurs dérivées. Mais quand ces conditions sont compatibles, trois circonstances se présentent, suivant que S coïncide avec 0, 1 ou X . La transformation de passage la plus générale qui vérifie les équations (21) se déduit de l'une d'elles en changeant λ en $m^2\lambda$ et X en $mX + n$ (m et n désignant des constantes arbitraires), c'est-à-dire en changeant Y en $\frac{1}{m^2}Y$ et X en $mX + n$ dans l'équation

$$Y' = 6Y^2 + S.$$

Or, cette transformation conserve l'équation quand $S \equiv 0$; quand $S \equiv 1$, l'équation n'est conservée que si $m^2 = 1$, et quand $S \equiv X$, que si $m^2 = 1$, $n = 0$.

(¹) J'entends par là que les conditions à vérifier sont algébriques par rapport aux coefficients de (C) et à leurs dérivées.

Si donc les équations (21) et (24) sont compatibles, λ , μ , X sont connus *algébriquement* à l'aide des coefficients de (C) (et de leurs dérivées) dans l'hypothèse $S \equiv X$; λ et μ sont connus algébriquement et X *par une quadrature* dans l'hypothèse $S \equiv \frac{1}{2}$; μ est connu algébriquement, λ et X *par les deux quadratures* (21) dans l'hypothèse $S \equiv 0$ (1). L'intégrale générale de (C) peut s'écrire

$$\begin{aligned} y &= \lambda p(X + k, 1, h) + \mu, & \text{si } S &\equiv \frac{1}{2}, \\ y &= \lambda p(X + k, 0, h) + \mu, & \text{si } S &\equiv 0. \end{aligned}$$

En particulier, *quand l'équation (C) ne renferme pas x explicitement*, le cas de $S \equiv X$ ne peut se présenter, et l'intégrale générale de (C) est (si $b \neq 0$) de la forme

$$y = B^{-\frac{1}{5}} e^{\frac{2hr}{5}} p[X + k, 0, h] - \frac{C}{2B} - \frac{3b^2}{25B},$$

avec

$$X = \frac{5}{\sqrt{6}} \frac{B^{\frac{2}{5}}}{b} e^{\frac{hr}{5}};$$

si $b = 0$, elle est donnée par l'équation elliptique

$$\frac{y'^2}{2} = \frac{B}{3} y^3 + \frac{C}{2} y^2 + Dy + h.$$

Je vais montrer maintenant que l'intégrale générale de l'équation

$$(F) \quad y' = 6y^2 + x$$

est méromorphe dans tout le plan.

ÉTUDE DE L'ÉQUATION $y' = 6y^2 + x$.

17. J'établirai d'abord que l'intégrale de l'équation (F) n'admet pas de *points critiques algébriques*, mais admet des *pôles mobiles*.

Soit, en effet, x_0 un point singulier algébrique d'une inté-

(1) C'est ce que vérifie un calcul tout élémentaire que j'ometts pour abréger et qui donne explicitement les expressions de λ , μ , X .

grale $y(x)$, et soient y_0, y'_0 les valeurs (finies ou non) de y, y' pour $x = x_0$. Tout d'abord, y_0 et y'_0 ne peuvent être finies toutes deux; sinon $y(x)$ serait holomorphe pour $x = x_0$. Si y'_0 est infini, il en est de même *a fortiori* de y''_0 et, par suite, de y_0 d'après (F).

Soit donc

$$y = \frac{h}{(x - x_0)^r} (1 + \varepsilon),$$

r désignant un nombre réel, positif et rationnel. Pour que y'' et y^2 aient même partie principale, il faut que $r = 2$ et $h = 1$. Posons alors

$$y = \frac{1}{(x - x_0)^2} [1 + k(x - x_0)^s + \dots],$$

s étant réel, positif et rationnel; la substitution de cette valeur de y dans l'équation (F) montre que s doit être égal à 4 et k égal à $-\frac{x_0}{10}$. En poursuivant le calcul, on trouve que, si une intégrale $y(x)$ admet le point $x = x_0$ comme point singulier algébrique (pôle ou point critique), son développement, dans le voisinage de ce point, est de la forme

$$(25) \quad y = \frac{1}{(x - x_0)^2} - \frac{x_0}{10} (x - x_0)^2 - \frac{1}{6} (x - x_0)^3 + h(x - x_0)^4 + \frac{x_0^2}{18} (x - x_0)^6 + \dots;$$

h désigne une constante arbitraire.

Il existe effectivement des intégrales qui admettent un tel développement, et ces intégrales sont méromorphes dans le domaine du point $x = x_0$. Pour l'établir (1) écrivons le développement (25) ainsi :

$$y = \frac{1}{(x - x_0)^2} - \frac{x}{10} (x - x_0)^2 - \frac{(x - x_0)^3}{15} + h(x - x_0)^4 + \frac{x^2}{18} (x - x_0)^6 + \dots,$$

(1) Il est bien facile de voir que, si l'on poursuit le développement (25), toutes les puissances successives de $(x - x_0)$ sont entières, ce qui montre que $y(x)$ est dénuée de points critiques algébriques. D'autre part, une fois h choisi, tous les coefficients du développement (25) sont déterminés, et l'on prouve aisément que ce développement converge en le comparant à une série *majorante*. Mais le mode de démonstration que nous employons dans le texte nous sera utile par la suite.

d'où

$$\gamma' = -\frac{2}{(x-x_0)^3} - \frac{x(x-x_0)}{5} - \frac{3}{10}(x-x_0)^2 \\ + 4h(x-x_0)^3 + \frac{x^2}{3}(x-x_0)^5 + \dots$$

Éliminons $(x-x_0)$ entre ces deux développements; il vient, en posant $\gamma = \frac{1}{z^2}$,

$$(26) \quad \gamma' = -\frac{2}{\varepsilon z^3} - \frac{x\varepsilon z}{2} - \frac{z^2}{2} + 7h\varepsilon z^3 + \dots \quad (\varepsilon = \pm 1).$$

Ceci posé, j'effectue, dans l'équation (F), la transformation

$$(27) \quad \gamma = \frac{1}{z^2}, \quad \gamma' = -\frac{2}{z^3} - \frac{xz}{2} - \frac{z^2}{2} + uz^3;$$

les fonctions $z(x)$, $u(x)$ vérifient un système qu'on forme immédiatement, à savoir (1) :

$$(28) \quad \begin{cases} \frac{dz}{dx} = 1 + xz^4 + \frac{z^5}{4} - \frac{u}{2}z^6, \\ \frac{du}{dx} = \frac{x^2z}{8} + \frac{3xz^2}{8} + z^3\left(\frac{1}{4} - ux\right) - \frac{5uz^4}{4} - \frac{3u^2}{2}z^5. \end{cases}$$

Ce système admet une solution $z(x)$, $u(x)$, et une seule, qui répond aux conditions initiales x_0 , $z_0=0$, u_0 , et cette solution est *holomorphe* pour $x=x_0$; la solution $\gamma(x)$ correspondante admet $x=x_0$ comme pôle, et h est égal à $+\frac{u_0}{7}$.

(1) La transformation (27) est choisie précisément de façon que le nouveau système différentiel soit *régulier* pour $z=0$.

Il est évident, en effet, que le système est de la forme

$$z^m z' = P(x, z, u), \quad z^m u' = Q(x, z, u) \\ (P, Q \text{ polynomes en } x, z, u; P \text{ ou } Q \neq 0 \text{ pour } z=0);$$

d'autre part, si l'on essaie une solution de la forme

$$z = (x-x_0)(1+\dots), \quad u = u_0 + (x-x_0)(l+\dots),$$

les premières égalités à écrire

$$1+\dots = \frac{P(x_0, 0, u_0)+\dots}{(x-x_0)^m(1+\dots)}, \quad l+\dots = \frac{Q(x_0, 0, u_0)+\dots}{(x-x_0)^m(1+\dots)}$$

doivent, d'après (26), être admissibles pour x_0 , u_0 , quelconques, ce qui exige $m=0$.

Remarquons que rien n'est changé [si ce n'est le signe de z dans (28)], quand on emploie, au lieu de la transformation (27), la transformation

$$(29) \quad y = \frac{1}{z^2}, \quad y' = \frac{2}{z^3} + \frac{xz}{2} - \frac{z^2}{2} - uz^3.$$

L'intégrale générale $y(x)$ de l'équation (F) n'admet donc pas de points critiques algébriques, mais elle admet des pôles et, dans le voisinage de ces pôles, le développement de $y(x)$ est de la forme (25) ⁽¹⁾.

18. *Mais l'intégrale $y(x)$ de (F) ne présente-t-elle pas de singularités transcendantes?* C'est ce qui n'est nullement démontré.

Pour bien faire comprendre la nature de cette difficulté, considérons un exemple plus caractéristique que l'exemple cité plus haut (n° 2), à savoir l'exemple de l'équation

$$y'' = y'^2 \left[\frac{y[2k^2y^2 - (1 + k^2)]}{(1 - y^2)(1 - k^2y^2)} + \frac{1}{\lambda \sqrt{(1 - y^2)(1 - k^2y^2)}} \right]$$

(λ, k^2 , constantes numériques).

On voit aisément que l'intégrale $y(x)$ de cette équation ne présente pas de points singuliers algébriques autres que des pôles; une discussion plus approfondie montre même que toute inté-

(¹) Étant donnée une équation (C) qu'on peut supposer ramenée à la forme
(C') $y'' - 6y' - S(x) = 0$,

cherchons les conditions pour que $y(x)$ admette des pôles mobiles; si l'on remplace, dans (C'), $y(x)$ par un développement polaire, on voit que ce développement doit être de la forme

$$y = \frac{1}{(x - x_0)^2} - \frac{x_0}{10}(x - x_0)^2 - \frac{1}{6}(x - x_0)^3 + h(x - x_0)^{i+3} + \dots, \quad (i > 0);$$

mais quand on veut déterminer le terme $h(x - x_0)^{i+3}$, on trouve que les termes en $(x - x_0)^2$ [dans l'égalité (C')] se réduisent au terme unique $\frac{S''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$.

Ce terme ne peut disparaître (pour x_0 quelconque) que si $S(x)$ est linéaire en x . C'est précisément la condition que nous avons trouvée au n° 15, en exprimant que l'équation (C') a ses points critiques fixes. Cette coïncidence n'est pas fortuite, mais résulte d'un théorème général qui sera exposé dans les *Mémoires des Acta*.

grale $y(x)$ qui *tend* vers une valeur déterminée (finie ou non) quand x tend vers x_0 sur un certain chemin (d'ailleurs quelconque), est holomorphe ou méromorphe pour $x = x_0$. Ce serait cependant commettre une erreur grossière que d'en conclure que l'intégrale $y(x)$ est méromorphe dans tout le plan. L'intégrale de l'équation peut en effet s'écrire

$$y = \operatorname{sn}_k[\lambda \log(Ax + B)], \quad A, B \text{ constantes arbitraires.}$$

Le point $x = -\frac{B}{A}$ est donc un point d'indétermination complète de $y(x)$; quand x tend vers $-\frac{B}{A}$ sur un chemin donné, $y(x)$ ne tend vers aucune limite (finie ou non); de plus, une infinité de valeurs de $y(x)$ se permutent autour de ce point (à moins que $2i\pi\lambda$ ne soit une période ou une partie aliquote d'une période de sn_k).

Il n'est donc nullement absurde, *a priori*, de supposer que l'intégrale $y(x)$ de l'équation (F) présente des singularités transcendentes. Ces points singuliers peuvent être à la fois points essentiels et points critiques transcendants, être isolés ou former (comme dans le cas du troisième ordre) des lignes, des ensembles parfaits, etc. Pour démontrer que les singularités transcendentes de $y(x)$ n'existent pas, nous n'avons le droit d'introduire aucune restriction : une discussion qui écarterait d'avance certaines singularités comme invraisemblables serait *inexistante*.

C'est cet obstacle, comme je l'ai dit, qui a arrêté longtemps les efforts des géomètres. Les deux premières méthodes qui m'ont permis de le surmonter étaient, la première surtout, d'une complication extrême. J'ai trouvé récemment une troisième méthode beaucoup plus simple, méthode synthétique qui non seulement s'applique d'elle-même aux équations du second ordre, mais s'étend aux équations d'ordre supérieur. C'est cette méthode que je vais exposer ici sur l'équation (F).

19. Démonstration de la non-existence des singularités transcendentes de l'équation (F).

Soit $y(x)$ une intégrale particulière de (F), définie par les valeurs initiales (finies) x_0, y_0, y'_0 de x, y, y' . La fonction $y(x)$

est holomorphe, et, *a fortiori*, méromorphe dans le voisinage de x_0 . Soit Γ le plus grand cercle de centre x_0 où $y(x)$ reste méromorphe. Si Γ embrasse tout le plan, le théorème est démontré. Sinon, il existe sur la circonférence de Γ au moins un point singulier non algébrique, $x = a$, de la fonction $y(x)$. Je vais montrer que cette hypothèse est absurde.

Faisons tendre x vers le point $\bar{a}$ sur le rayon $\overline{x_0 a}$ ou l , et soit $M(x)$ le module maximum des deux quantités $y(x)$, $y'(x)$. Si $M(x)$ ne tend pas vers l'infini quand x tend vers $\bar{a}$ sur l , il est clair que $y(x)$ est holomorphe pour $x = a$. En effet, il existe alors sur le rayon l des points x_1 , aussi voisins de a qu'on veut, pour lesquels y et y' prennent des valeurs y_1 , y'_1 de module inférieur à une certaine quantité numérique A . D'après le théorème fondamental de Cauchy, l'intégrale $y(x)$ de (F) définie par les conditions initiales.

$$x_1, y_1, y'_1, \quad \text{avec} \quad |x_1 - a| < A, \quad |y_1| < A, \quad |y'_1| < A,$$

est holomorphe dans un cercle de centre x_1 et de rayon supérieur à une certaine quantité positive B ; par suite, cette intégrale est holomorphe pour $x = a$. Il faut donc admettre que $M(x)$ tend vers l'infini quand x tend vers $\bar{a}$ sur l .

On connaît une infinité d'intégrales de (F) pour lesquelles $M(x)$ tend vers l'infini avec $\frac{1}{x-a}$: ce sont les intégrales qui admettent $x = a$ comme pôles; pour ces intégrales, l'expression u définie par l'égalité (27),

$$u = y^{\frac{3}{2}} \left[y' + \frac{1}{2y} \right] + 2y^3 + \frac{x}{2} y$$

(où l'on donne à $y^{\frac{3}{2}}$ un signe convenable), tend vers une valeur arbitraire finie γh . Inversement, supposons qu'une intégrale $y(x)$ satisfasse à la condition suivante : il existe (sur le rayon l) des points x_1 , aussi voisins de $\bar{a}$ qu'on veut, tels que $|y(x_1)|$ dépasse toute limite donnée et que (pour un signe convenable de $y^{\frac{3}{2}}$) $|u(x_1)|$ reste inférieur à une certaine quantité A . Je dis que cette intégrale $y(x)$ est méromorphe pour $x = a$.

Posons, en effet, comme plus haut, $y = \frac{1}{z^2}$. Une des expres-

sions

$$\frac{1}{z^3} \left[y' + \frac{2}{z^3} + \frac{xz}{2} + \frac{z^2}{2} \right], \quad \frac{-1}{z^3} \left[y' - \frac{2}{z^3} - \frac{xz}{2} + \frac{z^2}{2} \right]$$

garde, pour $x = x_1$, un module inférieur à A, soit la première. Effectuons la transformation (27)

$$y = \frac{1}{z^2}, \quad y' = -\frac{2}{z^3} - \frac{xz}{2} - \frac{z^2}{2} + uz^3.$$

L'intégrale $z(x)$, $u(x)$ du système (28), définie par les conditions initiales

$$x_1, \quad z_1, \quad u_1, \quad \text{avec} \quad |x_1 - a| < A, \quad |z_1| < A, \quad |u_1| < A,$$

est holomorphe dans un cercle de centre de x , et de rayon supérieur à une quantité numérique B; elle est donc holomorphe pour $x = a$. Par suite, $y(x)$ est méromorphe pour $x = a$.

Cette remarque va nous servir à démontrer que $x = a$ ne peut être un point transcendant de l'intégrale considérée $y(x)$.

20. L'expression u , introduite plus haut, jouit de la propriété que, si l'on remplace y et y' par le développement polaire d'une intégrale, une des deux valeurs de u reste finie et prend au pôle une valeur arbitraire. Il est facile de former une infinité d'expressions

$$(30) \quad U = \rho(x, y, y')$$

qui jouissent de cette propriété, et de les choisir, notamment, *rationnelles en x, y, y'* . Le procédé le plus simple consiste à multiplier les deux égalités

$$y' + \frac{1}{2y} - y^{\frac{3}{2}} \left[2 + \frac{x}{2y^2} - \frac{u}{y^3} \right] = 0,$$

$$y' + \frac{1}{2y} + y^{\frac{3}{2}} \left[2 + \frac{x}{2y^2} - \frac{u}{y^3} \right] = 0;$$

il vient

$$y'^2 - 4y^3 - 2xy + \frac{y'}{y} + 4u + \frac{1}{y} [\dots] = 0.$$

Posons

$$U = y'^2 - 4y^3 - 2xy + \frac{y'}{y};$$

quand, dans U, on remplace y par un développement polaire (25),

$U(x)$ est (dans le voisinage du pôle $x = x_0$) de la forme

$$U(x) = -28h + (x - x_0)^2 [\dots].$$

Pour éviter (ce qui nous sera utile plus loin) que $U'(x_0)$ ne soit nul, il suffit de remplacer U par $v = U + x$; soit donc

$$(31) \quad v = y'^2 - 4y^3 - 2xy + \frac{y'}{y} + x;$$

dans le voisinage d'un pôle $x = x_0$ de $y(x)$, on a

$$v(x) = -28h + x_0 + (x - x_0)^2 [\dots] = -4u(x) + x + \frac{1}{y} [\dots];$$

$u(x)$ désigne celle des deux valeurs de u qui reste finie au pôle $x = x_0$ de $y(x)$.

Donnons à v et à x des valeurs finies, à y une valeur très grande, et soit y' une quelconque des deux racines de l'équation (31); une des deux valeurs de l'expression u qui correspondent à ces valeurs de x, y, y' est de la forme

$$u = \frac{x - v}{4} + \frac{1}{y} [\dots],$$

et est, par conséquent, finie ⁽¹⁾.

Considérons, d'après cela, une intégrale $y(x)$ de (F), et supposons qu'il existe (sur le rayon l) des points x_i , tendant vers $\bar{a}$,

(¹) Remarquons que le succès de la méthode tient essentiellement à ce fait que v est du second degré en y' . Si l'on résout l'équation (31) par rapport à y' , on trouve [pour x, v finis et $|y|$ très grand]

$$y' = \frac{-1}{2y} + y^{\frac{3}{2}} \left[2 + \frac{x}{2y^2} - \frac{x - v}{4y^3} + \dots \right],$$

d'où (pour une des deux valeurs de u),

$$u = \frac{x - v}{4} + \frac{1}{y} (\dots).$$

Substituons, au contraire, à v une expression $U = \rho(x, y, y')$ rationnelle en x, y, y' , mais de degré $j > 2$ en y' , et qui prenne, en un pôle x_0 , une valeur arbitraire. Pour x, y, U donnés (x, U finis, y très grand), l'égalité $U = \rho$ définit j valeurs de y' , dont deux au moins laissent finie une valeur de u ; mais, pour chacune des $(j - 2)$ autres valeurs de y' , les deux valeurs de u peuvent être très grandes. Si donc, pour des valeurs x_i qui tendent vers $\bar{a}$, $|y(x)|$ croît indéfiniment, tandis que $U(x)$ reste fini, on n'en saurait conclure que $y(x)$ est méromorphe pour $x = \bar{a}$.

tels que $|y(x_1)|$ puisse dépasser toute limite, tandis que $v(x_1)$ reste fini [soit $|v(x_1)| < A$]; cette intégrale est méromorphe pour $x = a$, car une des deux valeurs de $u(x_1)$ reste finie.

21. Nous introduirons ici une restriction que nous lèverons dans un instant. Nous admettrons que l'intégrale considérée $y(x)$ (pour laquelle $x = a$ est un point transcendant) conserve sur le rayon l un module supérieur ou égal à une certaine quantité ρ .

Dans ces conditions, il est impossible que $v(x)$ tende vers une valeur finie quand x tend vers $\bar{a}$ sur l . En effet, si v et y restent finis (en même temps que $|y|$ reste supérieur à ρ), y' reste également fini [d'après l'égalité (31)], et l'intégrale $y(x)$ est holomorphe pour $x = a$. Si v reste fini en même temps que $|y|$ dépasse toute limite, $y(x)$, nous venons de le voir, est méromorphe pour $x = a$. Il faut donc que, pour des valeurs de x qui tendent vers $\bar{a}$, le module de $v(x)$ croisse indéfiniment.

Nous allons en déduire que, pour d'autres valeurs x_1 de x , voisines de $\bar{a}$, le module de $v(x)$ est très petit et, par suite, en vertu de la remarque finale du n° 20, que $y(x)$ est méromorphe pour $x = a$.

Considérons pour cela l'expression

$$(32) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{v'(x)}{v(x)} &= \frac{2y'y'' - 12y^2y' - 2xy' - 2y + \frac{y''}{y} - \frac{y'^2}{y^2} + 1}{y'^2 - 4y^3 - 2xy' + \frac{y'}{y} + x} \\ &= \frac{4y^3 - y'^2 + y^2 + xy}{y(y'y'^2 - 4y^4 - 2xy^2 + y' + xy)} = w. \end{aligned} \right.$$

Il faut que cette expression $w(x)$ croisse (en module) indéfiniment pour des points x_1 de l voisins de $\bar{a}$: autrement,

$v = v_0 e^{\int_{x_0}^x w dx}$ resterait fini quand x décrit le rayon l . De plus, la valeur de $y(x)$ en ces points x_1 dépasse toute limite; car si $|y(x_1)|$ reste fini (mais supérieur à ρ), $y'(x_1)$ est très grand, et la valeur $w(x_1)$ se réduit sensiblement à la valeur finie $-\frac{1}{y^2(x_1)}$.

D'autre part, si, entre les expressions $v(x, y, y')$ et $w(x, y, y')$, on élimine y' , les deux valeurs de $w(x, y, v)$ sont (pour y très

grand) de la forme

$$w = \frac{1}{v} + \frac{1}{\sqrt{y}} [\dots].$$

Si donc, pour x , voisin de $\bar{a}$ (sur l), $y(x)$ est très grand ainsi que $w(x)$, la fonction $v(x)$ est très petite, et l'intégrale $y(x)$ est méromorphe pour $x = a$.

Il est donc impossible que $x = a$ soit un point transcendant de l'intégrale considérée $y(x)$.

C. Q. F. D.

22. Nous avons toutefois introduit au numéro précédent une restriction : nous avons admis que $|y(x)|$ restait supérieur à une quantité positive ρ quand x tendait vers $\bar{a}$ sur l . Il importe de lever cette restriction.

Je remarque d'abord que, sans modifier en rien la méthode précédente, il est loisible, dans l'expression v , de remplacer le terme $\frac{y'}{y}$ par $\frac{y'}{y-g}$, g désignant une constante. La démonstration n'est donc en défaut que si, sur l , la fonction $y(x)$ s'approche autant qu'on le veut de toute valeur g donnée à l'avance.

Cette remarque permet d'écarter immédiatement le cas où $y(x)$ tendrait constamment vers zéro quand x tend vers $\bar{a}$ sur l . On pourra donc toujours choisir la quantité positive ρ de façon que, pour des points de l (aussi voisins de $\bar{a}$ qu'on veut), $|y(x)|$ soit supérieur à ρ ; pour d'autres points $x = x_1$ de l (aussi voisins de $\bar{a}$ qu'on veut), $|y(x)|$ sera inférieur à ρ . Telle est l'hypothèse où nous nous plaçons.

Il est évident que rien n'est changé dans le raisonnement des nos 21, 22, si l'on substitue au rayon l un autre chemin λ de longueur finie ⁽¹⁾, aboutissant au point $\bar{a}$, et le long duquel $y(x)$ est méromorphe [l'extrémité $\bar{a}$ étant supposée un point transcendant de la branche de fonction $y(x)$].

(¹) Il est essentiel de supposer λ de longueur finie; autrement la partie réelle de

$$\int_{\lambda} \frac{v'(x)}{v(x)} dx = \int_{\lambda} w(x) dx$$

pourrait croître indéfiniment, lors même que $|w|$ resterait inférieur à un nombre donné.

Ceci posé, je marque sur le rayon l la suite indéfinie de segments $\overline{x_1 x_2}, \overline{x_3 x_4}, \dots$ sur lesquels $|y'(x)|$ est moindre que ρ : j'appelle $c_{12}, c_{34}, \dots$ leurs longueurs. Je vais montrer qu'on peut remplacer chaque segment $\overline{x_1 x_2}$ par un chemin de longueur comparable à c_{12} , sur lequel $|y'(x)|$ est égal à ρ , et tel qu'entre ce chemin et le segment $\overline{x_1 x_2}$, la fonction $y(x)$ soit holomorphe.

A cet effet, je prends x comme fonction, y comme variable; l'équation (F) devient

$$(33) \quad \frac{d^2 x}{dy^2} = - \left(\frac{dx}{dy} \right)^3 [6y^2 + x].$$

Soit $x(y)$ l'intégrale de (33) définie par les conditions initiales : $x(y_0) = x_0, x'(y_0) = x'_0$. Pour $x'_0 = 0$, l'intégrale se réduit à $x \equiv x_0, x' \equiv 0$. Si y, y_0, x_0, x'_0 satisfont aux inégalités

$$(34) \quad |y| \leq \rho, \quad |y_0| \leq \rho, \quad |x_0 - a| \leq \rho, \quad |x'_0| \leq \tau$$

(τ désignant une quantité positive suffisamment petite), on peut écrire, en vertu des théorèmes bien connus de M. Poincaré,

$$x' = x'_0 [1 + \varepsilon(y, x_0, y_0, x'_0)], \quad |\varepsilon| < \tau;$$

ε représente une fonction holomorphe de y, x_0, y_0, x'_0 dans le domaine (34), et η une quantité choisie à l'avance aussi petite qu'on veut : il nous suffit ici de prendre η inférieur à $\frac{1}{2}$ par exemple.

Soit maintenant C le chemin que décrit y quand x varie (sur l) de x_1 à x_2 ; le chemin C ne sort pas du cercle γ décrit dans le plan des y , de l'origine comme centre, avec un rayon égal à ρ ; les deux extrémités y_1, y_2 de λ sont sur la circonférence de γ . Appelons s l'arc de C compté à partir de y_1 , et S la longueur totale de C. Appelons enfin α l'angle que fait le rayon l avec l'axe réel du plan des x , et posons $x = a + r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$; la quantité $\frac{dx}{ds}$ ou $x'(y) \frac{dy}{ds}$ est égale à $e^{i\alpha} \frac{dr}{ds}$. Remarquons de plus que si le point x_1 est pris suffisamment voisin de $\bar{a}, y'(x_1), y'(x_2), \dots$ sont très grands et leur module dépasse $\frac{1}{\tau}$.

L'égalité

$$x_2 - x_1 = (C) \int_{y_1}^{y_2} x'(y) dy = \int_0^S x'(y) \frac{dy}{ds} ds = e^{i\alpha} \int_0^S \frac{dr}{ds} ds$$

nous montre que

$$c_{12} = \int_0^S |x'(y)| ds = |x'_1| \int_0^S [1 + \varepsilon_1(s)] ds, \quad |\varepsilon_1| < \eta < \frac{1}{2},$$

d'où

$$c_{12} \geq |x'_1| \frac{S}{2}.$$

D'autre part, faisons décrire à y le plus petit arc de la circonférence γ compris entre y_1 et y_2 ; et soient σ la longueur de cet arc, L le chemin correspondant décrit par x , chemin qui part de x_1 pour aboutir en x_2 . On a

$$\text{arc } L \leq |x'_1| \int_0^\sigma [1 + \varepsilon_2(\sigma)] d\sigma \leq |x'_1| \frac{3\sigma}{2}, \quad |\varepsilon_2| < \eta < \frac{1}{2}.$$

Comme S est au moins égal à la corde qui joint les points y_1, y_2 , l'arc σ est au plus égal à $\frac{\pi}{2} S$; d'où

$$\text{arc } L \leq |x'_1| \frac{3\pi}{4} S \leq \frac{3\pi}{2} c_{12}.$$

Enfin, comme $x'(y)$ est holomorphe et différent de zéro dans le cercle et sur la circonférence γ , la fonction $y(x)$ est holomorphe entre L et le segment $\overline{x_1 x_2}$: autrement dit, on peut déformer L d'une façon continue (les extrémités x_1, x_2 ne variant pas) et le réduire au segment $\overline{x_1 x_2}$, sans rencontrer de points singuliers de $y(x)$.

Remplaçons donc chaque segment $\overline{x_1 x_2}, \overline{x_3 x_1}, \dots$ par le chemin L correspondant. Nous formons ainsi un chemin λ , composé d'arcs analytiques réguliers dont le nombre croît indéfiniment mais dont la longueur totale est inférieure à $\frac{3\pi}{2} l$ (si l désigne la longueur du rayon l). Le long de λ , la fonction $y(x)$ est méromorphe, son module est au moins égal à ρ et elle doit admettre l'extrémité $\bar{a}$ de λ comme point singulier transcendant. Le raisonnement des nos 20 et 21 montre dès lors que cette hypothèse est absurde.

23. Propriétés de la transcendante méromorphe $y(x)$ définie par l'équation (F). — Chaque intégrale $y(x)$ de l'équation (F) est donc une fonction méromorphe dans tout le plan. Elle n'admet comme pôles que des pôles doubles, et dans le voisi-

nage d'un de ces pôles $y(x)$ est de la forme

$$(25) \quad y = \frac{1}{(x-x_0)^2} - \frac{x_0}{10}(x-x_0)^2 + \dots$$

On sait qu'une fonction méromorphe peut toujours (et d'une infinité de manières) être représentée par le quotient de deux fonctions *entières*. Mais ce qu'il importe de démontrer c'est qu'on peut choisir ici ces fonctions entières de manière qu'elles soient définies par une équation différentielle très simple *du troisième ordre*.

Tout d'abord, si l'on pose

$$= - \int y(x) dx, \quad \zeta = e^{\int \eta(x) dx},$$

on a

$$y = - \frac{d^2}{dx^2} \log \zeta = \frac{\zeta'^2 - \zeta \zeta''}{\zeta^3},$$

et ζ vérifie une équation différentielle du quatrième ordre qu'on peut écrire ainsi

$$\frac{\zeta}{\zeta'} = \eta, \quad \eta''' + 6\eta'^2 + x = 0.$$

Mais la dernière équation, multipliée par η'' , s'intègre immédiatement et donne

$$\frac{\eta'^2}{2} + 2\eta'^3 + x\eta' - \eta = \text{const.}$$

La fonction $y(x)$ se laisse donc définir par l'égalité

$$y = - \frac{d}{dx} \left(\frac{\zeta'}{\zeta} \right),$$

où ζ est une fonction entière qui vérifie le système du troisième ordre

$$(35) \quad \frac{\zeta'}{\zeta} = \eta, \quad \frac{\eta'^2}{2} + 2\eta'^3 + x\eta' - \eta = 0.$$

On serait arrivé au même résultat par un procédé systématique qui a une portée générale. Le procédé consiste, dans ce cas particulier, à substituer à $y(x)$ une combinaison $P(x, y, y')$ qui n'ait que des pôles simples de résidu égal à 1. Prenons pour P un polynome et remplaçons-y $y(x)$ et $y'(x)$ par un développement (25) et le développement dérivé. Pour que les termes de plus haut degré en $\frac{1}{x-x_0}$ se détruisent, il faut que P soit au moins du

deuxième degré en y' et du troisième en y . Considérons donc l'expression

$$a(x)y'^2 + y'[b(x)y + c(x)] + d(x)y^3 + e(x)y^2 + f(x)y,$$

et cherchons à disposer de $a, \dots, f$ de manière que $x = x_0$, au lieu d'être un pôle du sixième ordre de cette expression, soit pôle seulement du premier ordre et ait comme résidu l'unité. Les six équations linéaires et non homogènes en $a, b, \dots, f$ qu'on obtient ainsi conduisent immédiatement à l'expression

$$\eta = \frac{y'^2}{2} - 2y^3 - xy; \quad \text{d'où l'on déduit :} \quad \eta' = -y;$$

la fonction $\zeta = e^{\int \eta dx}$ est une fonction entière.

24. De l'intégrale $y(x)$ considérée comme fonction des constantes. — Quand une équation

$$(36) \quad y'' = R(y', y, x)$$

(où R est rationnel en y', y, x) a ses points critiques fixes, l'intégrale $y(x)$, définie par les conditions initiales x_0, y_0, y'_0 , est une fonction *uniforme* des deux constantes arbitraires y_0, y'_0 , (x_0 a reçu une valeur numérique); mais trois cas peuvent se présenter⁽¹⁾:

Premier cas. — $y(x)$ est une fonction *rationnelle* de y_0, y'_0 . Dans ce cas, ou bien l'intégrale s'exprime algébriquement en fonction de x et de z, z', z'' , la fonction $z(x)$ représentant l'intégrale d'une équation linéaire et homogène du troisième ordre, à coefficients algébriques; ou bien l'équation admet une intégrale première

$$(37) \quad H(x, y, y') = \text{const.}$$

où H est une fonction rationnelle de y', y , dont les coefficients s'expriment algébriquement en x et u (u désignant l'intégrale d'une équation de Riccati à coefficients algébriques)⁽²⁾.

Deuxième cas. — $y(x)$ est une fonction transcendante de y_0, y'_0 , mais on peut substituer à y_0, y'_0 d'autres constantes telles qu'une (et une seule) d'entre elles figure *algébriquement* dans y .

⁽¹⁾ Voir, par exemple, mes *Leçons de Stockholm*, p. 465-466.

⁽²⁾ *Loc. cit.*, p. 360-383.

On dit alors que $y(x)$ est une fonction *semi-transcendante* des deux constantes. L'équation admet alors une intégrale première (37) (1).

Troisième cas. — $y(x)$ est une fonction transcendante des deux constantes, de quelque façon qu'on les choisisse. On dit alors que l'intégrale est une *fonction essentiellement transcendante* des deux constantes.

25. Nous allons voir que l'intégrale $y(x)$ de l'équation (F) rentre dans ce dernier cas.

Tout d'abord, l'intégrale $y(x)$ de (24) ne peut renfermer rationnellement les deux constantes. Autrement, il en serait de même pour l'intégrale de l'équation

$$(38) \quad y'' = 6y^2 + \alpha^2 x,$$

qui se déduit de (24) en changeant x en αx et y en $\frac{y}{\alpha^2}$; la chose ayant lieu pour α quelconque, aurait lieu pour $\alpha = 0$, résultat absurde, puisque l'intégrale $y = p(x + k, 0, h)$ de l'équation $y'' = 6y^2$ est une fonction *semi-transcendante* des constantes.

Admettons maintenant que l'intégrale $y(x)$ de (24) soit une fonction *semi-transcendante* des constantes. Il existe alors une intégrale première de la forme (37), et, par suite, *des équations intégrales*

$$(39) \quad P(y', y, x) = 0,$$

où P est un *polynome* en y', y . Je vais montrer que cela est impossible.

L'équation du premier ordre (39) ayant son intégrale uniforme, le coefficient de la plus haute puissance de y' , soit y'^m , est indépendant de y et peut être supposé égal à l'unité. Le polynome P est de la forme

$$P \equiv y'^m + Q_1(y, x)y'^{m-1} + \dots + Q_{2m-1}(y, x)y' + Q_{2m}(y, x) = 0,$$

Q_{2i} désignant un polynome en y de degré $2i$ au plus.

Si, dans P , on remplace y par $\frac{y}{\alpha^2}$, y' par $\frac{y'}{\alpha^2}$, x par $x_0 + \alpha x$, le

(1) *Leçons de Stockholm*, p. 466-482.

polynome P prend la forme

$$\frac{1}{\alpha^k} [P_0(y', y) + \alpha P_1(y', y, x) + \dots], \quad k \geq 3m.$$

P_0 est une fonction homogène de $y'^{\frac{1}{2}}$, $y^{\frac{1}{2}}$, et l'égalité $P_0 = 0$ est une équation intégrale de l'équation (38) où α est nul. Il suit de là aussitôt que P_0 est nécessairement de la forme

$$P_0 \equiv \lambda(y'^2 - 4y^2) \quad (\lambda \text{ facteur constant}).$$

Cela exige que $k = 3m = 6j$: autrement, dans P_0 , le coefficient de la plus haute puissance de y' serait un polynome en y dont le degré serait égal à $\frac{k-3m}{2}$. Le polynome Q_{2m} en y est, par suite, de degré $\frac{3m}{2}$.

Mais on peut aller plus loin : l'intégrale de l'équation (39) admet des pôles mobiles $x = x_0$; dans le voisinage d'un de ces pôles, $y(x)$ vérifie [voir n° 17, éq. (26)] une relation de la forme

$$(40) \quad y' = 2y^{\frac{3}{2}} + \frac{x}{2y^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2y} - \frac{7h_1}{y^{\frac{3}{2}}} + \dots \quad (h_1 \text{ valeur numérique}).$$

Toute racine de l'équation (39) en y' doit donc (dans le domaine de $y = \infty$) être représentée par un développement (40); ceci revient à dire qu'on a identiquement

$$\begin{aligned} P(y', y, x) &\equiv \prod_{i=1}^{i=j} \left[\left(y' + \frac{1}{2y} + \dots \right)^2 - y^3 \left(2 + \frac{x}{2y^{\frac{1}{2}}} + \frac{l_i}{y^{\frac{3}{2}}} + \dots \right)^2 \right] \\ &\equiv y'^{2j} + \frac{jy'^{2j-1}}{y} + \dots, \end{aligned}$$

identité impossible puisque, dans le dernier membre, le terme fractionnaire $\frac{y'^{2j-1}}{y}$ n'est détruit par aucun autre.

L'intégrale $y(x)$ de (F) renferme donc les deux constantes sous forme transcendante de quelque façon qu'on les choisisse.

C. Q. F. D.

26. De l'irréductibilité de l'équation (F). — Le résultat que nous venons d'obtenir entraîne d'importantes conséquences relatives à l'irréductibilité de l'équation (F).

Je rappelle d'abord la définition précise de l'irréductibilité d'une équation du second ordre ⁽¹⁾ telle qu'il convient de l'introduire quand on étudie les équations différentielles comme sources de transcendantes nouvelles.

Définissons d'abord les transcendantes *du premier ordre* : toute fonction d'une ou de plusieurs variables qui vérifie un système différentiel *algébrique* dont l'intégrale générale ne dépend que d'une constante est une transcendante du premier ordre. Plus généralement, considérons un système différentiel du premier ordre algébrique par rapport aux fonctions et à leurs dérivées, mais dont les coefficients (fonctions des variables indépendantes) sont des transcendantes du premier ordre : les fonctions engendrées par un tel système seront dites encore *du premier ordre*, et ainsi de suite ⁽²⁾. Les fonctions ainsi définies comprennent les fonctions qu'on obtient en remplaçant, dans une transcendante du premier ordre, les variables par d'autres transcendantes du premier ordre.

Introduisons maintenant les transcendantes *classiques*. Soit S un système différentiel dont l'intégrale générale ne dépend que d'un nombre fini de constantes : ce système sera dit *classique* s'il est *linéaire* ou *abélien* ⁽³⁾. Tout système (S) dont l'intégrale générale renferme *algébriquement* ses constantes (convenablement choisies), est réductible *algébriquement* ⁽⁴⁾ à un tel système, et sera, par suite, regardé comme classique. D'après cette définition, tout système classique renferme algébriquement les fonctions et leurs dérivées : si les variables figurent aussi algébriquement, les transcendantes engendrées par S seront dites *transcendantes classiques*. Si les coefficients de (S) ne sont plus

⁽¹⁾ Voir mes *Leçons de Stockholm*, p. 487-501.

⁽²⁾ C'est à un point de vue analogue que se sont placés M. Picard et M. Vesiot dans leur étude de la réductibilité des équations différentielles linéaires, par exemple dans la recherche des cas où l'équation s'intègre par quadratures.

⁽³⁾ Un système est dit *abélien* si son intégrale générale est représentée par des fonctions abéliennes de paramètres $u, v, \dots$, lesquels sont donnés en fonction de chaque variable x par une quadrature : $u(x) = \int h(x) dx + \text{const.}$

⁽⁴⁾ Par le mot *algébriquement* j'entends que les fonctions définies par (S) s'expriment algébriquement à l'aide des coefficients de (S), de leurs dérivées, et des intégrales d'un système linéaire ou abélien ; les coefficients de ce dernier système sont algébriques par rapport aux coefficients de (S) et à leurs dérivées.

algébriques, mais sont des transcendentes classiques, les nouvelles transcendentes ainsi engendrées seront dites encore *classiques*, etc.

D'après cette définition, les *combinaisons* de fonctions classiques (j'entends les fonctions obtenues en remplaçant dans une transcendente abélienne, par exemple, les arguments par des fonctions abéliennes de nouveaux arguments, etc.) sont encore des fonctions classiques.

Plus généralement, appelons *transcendantes* T_i toute transcendente classique ou du premier ordre, *transcendantes* T_{i+1} toute transcendente engendrée, soit par un système classique, soit par un système différentiel du premier ordre, algébrique par rapport aux fonctions et à leurs dérivées, mais dont les coefficients sont des fonctions T_i ; soit enfin T l'ensemble de toutes les transcendentes ainsi obtenues.

J'ai établi (*loc. cit.*) ce théorème :

Si une équation différentielle algébrique du second ordre a ses points critiques fixes, la condition nécessaire et suffisante pour que son intégrale générale $y(x)$ soit distincte des transcendentes (T) , c'est que $y(x)$ soit une fonction essentiellement transcendente des deux constantes.

L'intégrale générale $y(x)$ de l'équation (F) est donc une transcendente irréductible aux transcendentes classiques, aux transcendentes du premier ordre, et à leurs combinaisons. *C'est une fonction méromorphe (du second ordre) essentiellement nouvelle.*

27. On pourrait penser que certaines intégrales *particulières* de l'équation (F) sont algébriques ou réductibles à des transcendentes connues. Il n'en est rien.

Tout d'abord, si une intégrale $y(x)$ est algébrique, elle est rationnelle et peut se développer, dans le domaine de $x = \infty$, sous la forme

$$y = a_i x^i + a_{i-1} x^{i-1} + a_{i-2} x^{i-2} + \dots, \quad (i > 0 \text{ ou } < 0 \text{ ou } = 0).$$

Si i est négatif ou nul, y' et y^2 sont finis pour x très grand, et l'égalité (F) ne saurait être vérifiée. Si i est égal ou supérieur

à 1, le terme en x^{2i} qu'introduit y^2 dans l'équation (F) ne peut être détruit par aucun autre. Toute intégrale $y(x)$ de (F) est donc transcendante.

Admettons maintenant qu'une intégrale $y(x)$ de (24) vérifie une équation différentielle algébrique, soit (f), qui ne soit pas conséquence de (F). Les solutions $y(x)$ communes à (F) et à (f) ne peuvent dépendre que d'une constante (et dépendent effectivement d'une constante, puisque autrement ces solutions seraient algébriques). Il est donc possible, à l'aide d'éliminations algébriques, de remplacer (f) par une équation algébrique du premier ordre, soit

$$P(y', y, x) = 0,$$

où P est un polynôme. Cette équation doit être une *équation intégrale* de (F) : or nous savons (n° 25) que la chose est impossible.

Toute intégrale particulière $y(x)$ de (24) est donc une transcendante nouvelle.

28. Remarque sur la définition de l'irréductibilité. — La définition précise que nous avons donnée plus haut de l'irréductibilité d'une équation différentielle s'impose dans les questions qui nous occupent, où les variables qui doivent jouer le rôle de *fonctions* sont indiquées ainsi que celles qui doivent être prises comme *variables indépendantes*.

Dans les problèmes où toutes les variables jouent un rôle symétrique, on peut adopter une définition de la *réductibilité* plus générale que la précédente.

Un exemple le fera nettement comprendre : Si l'on étend au troisième ordre la définition que nous avons adoptée pour le deuxième ordre, on arrive à cette conclusion que les transcendentes fuchsienues $y(x)$ sont des transcendentes vraiment nouvelles, j'entends *irréductibles* aux transcendentes du premier ordre et classiques. Néanmoins, *si l'on prend x comme fonction et y comme variable*, l'équation différentielle qui définit une fonction fuchsienne équivaut à une équation de Riccati; mais, pour opérer cette réduction, il a fallu permuter les rôles de la fonction et de la variable. La différence qui sépare l'étude de la fonction fuchsienne et celle de l'équation de Riccati correspon-

dante est de même nature que celle qui sépare les travaux d'Abel et de Jacobi sur l'intégrale elliptique et ceux de Legendre.

Parmi toutes les définitions qu'on a proposées de la réductibilité de l'intégrale *générale* d'une équation différentielle, la plus large et la plus rationnelle à la fois me semble être celle de M. Drach ⁽¹⁾, que je rappelle brièvement en me limitant à une équation du deuxième ordre

$$(E) \quad \frac{dy}{dx} = z, \quad \frac{dz}{dx} = R(x, y, z),$$

où R est rationnel en x, y, z .

Considérons le système d'équations aux dérivées partielles

$$(S) \quad \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y} z + \frac{\partial f_1}{\partial z} R = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} z + \frac{\partial f_2}{\partial z} R = 0.$$

Supposons qu'il existe au moins une relation algébrique entre x, y, z, f_1, f_2 , et leurs dérivées successives jusqu'à un certain ordre, relation qui, sans être une conséquence des équations S , soit compatible ⁽²⁾ avec ces équations : dans ce cas (et dans ce cas seulement), l'intégrale générale de l'équation (E) est dite *réductible*.

Quand on adopte cette définition, toute équation (E) dont on connaît un *multiplieur*, par conséquent toute équation où R est indépendant de z , est *réductible*. En particulier, l'équation $y'' = 6y^2 + x$ est réductible.

J'ai insisté sur ce point pour éviter tout malentendu. Mais ce qu'il importe de retenir, c'est qu'on ne connaît aucun moyen de remplacer l'équation (F) par une équation plus simple (ou par une combinaison de telles équations).

29. *Des correspondances biuniformes définies par l'intégrale $y(x)$ de l'équation (F).* — Soit $y = \varphi(x, x_0, y_0, y'_0)$ l'intégrale de l'équation (F) définie par les conditions initiales x_0, y_0, y'_0 . La fonction $y(x)$, étant méromorphe dans tout le plan des x , est également une fonction *méromorphe* de x_0, y_0, y'_0 dans tout le plan de chacune de ces variables, mais $x_0 = \infty$,

⁽¹⁾ *Thèse*. Paris, 1898.

⁽²⁾ J'entends par là qu'un système au moins de deux fonctions f_1, f_2 indépendantes vérifie à la fois (S) et la relation considérée.

$y_0 = \infty, y'_0 = \infty$ sont des singularités essentielles de

$$\varphi(x, x_0, y_0, y'_0).$$

Les égalités

$$(41) \quad y = \varphi(x, x_0, y_0, y'_0), \quad y' = \varphi'(x, x_0, y_0, y'_0),$$

peuvent aussi s'écrire

$$(42) \quad y_0 = \varphi(x_0, x, y, y'), \quad y'_0 = \varphi'(x_0, x, y, y').$$

Si nous donnons à x et à x_0 des valeurs numériques, les égalités (41) et (42) définissent une correspondance *biuniforme* (mais non birationnelle) entre les couples (y, y') et (y_0, y'_0) .

Considérons, d'une manière générale, une correspondance bi-uniforme entre deux plans yOz et y_0Oz_0 ; soit la correspondance

$$\begin{aligned} y &= f(y_0, z_0), & y_0 &= f_0(y, z), \\ z &= \varphi(y_0, z_0), & z_0 &= \varphi_0(y, z), \end{aligned}$$

où f et φ, f_0 et φ_0 sont des fonctions *méromorphes* des deux variables. J'ai pu obtenir, au sujet de telles correspondances, quelques résultats généraux ⁽¹⁾. J'ai montré notamment qu'elles se divisent en deux classes, suivant qu'il existe ou non une famille de courbes algébriques du plan yOz qui reste algébrique dans la transformation. Je conviens de dire que les correspondances de la première classe sont *semi-transcendantes*, au lieu que celles de la seconde classe sont *essentiellement biuniformes* ⁽²⁾.

⁽¹⁾ Voir mes *Leçons de Stockholm* (p. 482-485 et p. 501-509) et les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, avril 1896.

⁽²⁾ La correspondance biuniforme

$$\begin{aligned} y &= y_0, & y_0 &= y_0, \\ z &= z_0 e^{y_0}, & z_0 &= z e^{-y}, \end{aligned}$$

est semi-transcendante. La combinaison des deux transformations

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0, & y &= y_1 e^{z_1}, \\ z_1 &= z_0 e^{y_0}, & z &= z_1, \end{aligned}$$

conduit à la transformation essentiellement biuniforme

$$\begin{aligned} y &= y_0 e^{(z_0 e^{y_0})}, & y_0 &= y e^{-z}, \\ z &= z_0 e^{y_0}, & z_0 &= z e^{-(y e^{-z})}. \end{aligned}$$

Il existe d'ailleurs, ainsi que je l'ai montré, des correspondances biuniformes qui ne résultent pas de la combinaison de transformations semi-transcendantes.

La correspondance (41), (42) est essentiellement biuniforme. En effet, donnons à x et x_0 des valeurs arbitraires, et admettons que la correspondance soit semi-transcendante.

J'ai établi (*loc. cit.*) qu'il existe alors deux fonctions algébriques $\rho(y, y')$ et $R(y_0, y'_0)$ telles qu'on ait

$$\rho(y, y') = R(y_0, y'_0).$$

Les variables x, x_0 figurent analytiquement dans R et ρ . Donnons à x_0 une valeur numérique, laissons x arbitraire, et considérons l'égalité

$$\rho(x, y, y') = R(x, y_0, y'_0) \equiv u(x, y_0, y'_0).$$

Deux hypothèses sont possibles : ou bien $u(x)$ dépend de deux constantes distinctes, et y s'exprime algébriquement en u, u' (x figurant analytiquement); puisque $u(x)$ renferme algébriquement ses deux constantes, il en est de même de $y(x)$. Ou bien, $u(x)$ ne dépend que d'une constante, soit C , et $y(x)$ vérifie l'équation

$$\rho(y', y, x) = u(x, C).$$

- Cette équation ayant ses points critiques fixes, $y(x)$ renferme algébriquement la deuxième constante. Ces deux hypothèses étant à rejeter, on voit que la correspondance (41), (42) est essentiellement biuniforme.

50. Si nous développons $y(x)$ suivant les puissances de $(x - x_0)$, les valeurs successives de $y''(x_0), y'''(x_0), \dots$ sont des polynômes en x_0, y_0, y'_0 . On a donc

$$y = y_0 + y'_0 \left(\frac{x - x_0}{1} \right) + (6y_0^2 + x_0) \left(\frac{x - x_0}{1.2} \right)^2 + \dots \\ = \sum P_n(x, x_0, y_0, y'_0),$$

P_n désignant un polynôme en x, x_0, y_0, y'_0 .

La fonction [voir n° 23]

$$\eta = \frac{y'^2}{2} - 2y^2 - xy = \frac{y_0'^2}{2} - 2y_0^2 - x_0y_0 - \int_{x_0}^x y(x) dx,$$

se laisse développer de la même manière, et, par suite, la fonction

$$\zeta = \zeta_0 e^{\int_{x_0}^x \eta(x) dx}.$$

La fonction entière $\zeta(x)$ est donc représentable *par une série de polynômes en x, x_0, y_0, y'_0*

$$(43) \quad \zeta(x) = \sum Q_n(x, x_0, y_0, y'_0),$$

cette série converge *dans tout le plan de chaque variable x, x_0, y_0, y'_0* , et ses termes Q_n se calculent à l'aide de *dérivations successives*.

Les fonctions y, y' de x, x_0, y_0, y'_0 se laissent, par suite, mettre sous la forme de quotients de développements tels que (43), soit

$$y = \frac{\sum R_n(x, x_0, y_0, y'_0)}{\sum T_n(x, x_0, y_0, y'_0)}, \quad y' = \frac{\sum S_n(x, x_0, y_0, y'_0)}{\sum U_n(x, x_0, y_0, y'_0)}.$$

Il n'existe d'ailleurs aucun système de valeurs x, x_0, y_0, y'_0 donnant à y et y' la forme $\frac{0}{0}$. C'est ce qui résulte aussitôt des égalités

$$y = -\frac{d}{dx} \frac{\zeta'}{\zeta}, \quad y' = \frac{dy}{dx},$$

et de cette remarque que toute intégrale $\zeta(x)$ de (35) n'a que des zéros simples [voir n° 23]. La correspondance biuniforme (41), (42) ne possède donc (à distance finie) aucun *point-base* dans le champ des (y_0, y'_0) , mais les valeurs $y_0 = \infty, y'_0 = \infty$ sont des singularités essentielles des fonctions $y(y_0, y'_0), y'(y_0, y'_0)$.

31. Au développement (43), on peut substituer un développement plus convergent en considérant l'équation

$$y'' = 6y^2 + \alpha x,$$

et en développant $y(x)$ suivant les puissances de α . Le développement correspondant de $\zeta(x)$ est de la forme

$$\zeta(x) = A_0(x, x_0, y_0, y'_0) + \dots + \alpha^j A_j(x, x_0, y_0, y'_0) + \dots;$$

les coefficients A_j désignent des fonctions *entières* de x qui se déduisent de la fonction $\sigma(x, o, h)$ par des intégrations successives; les A_j sont également des fonctions entières de x_0, y_0, y'_0 .

On peut de même, pour étudier l'intégrale $y(x)$ dans le voisinage de $x = a$, considérer l'équation

$$y'' = 6y^2 + a + \alpha x,$$

et développer $\zeta(x)$ suivant les puissances de x . Ces développements sont fort utiles dans l'étude approfondie de la transcendante $y(x)$; je me borne ici à les signaler.

32. Résumé des résultats obtenus sur les équations

$$(\mathcal{C}) \quad y'' = b(x)y' + B(x)y^2 + C(x)y + D(x).$$

Les résultats auxquels nous sommes parvenus se résument ainsi :

Si une équation $(\mathcal{C})$ (où b, B, C, D sont algébriques en x) a ses points critiques fixes, elle est réductible, par une transformation

$$(44) \quad y = \lambda(x)Y + \mu(x), \quad x = \varphi(X),$$

à la forme

$$(\epsilon) \quad y'' = \alpha y^2 + \beta y + \gamma \quad (\alpha, \beta, \gamma \text{ constantes numériques}).$$

Inversement, toute équation (ϵ) a son intégrale générale méromorphe dans tout le plan des x .

On sait reconnaître, à l'aide d'un nombre fini d'opérations algébriques, si une équation donnée $(\mathcal{C})$ a ses points critiques fixes : pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit qu'une certaine condition algébrique (*unique*) entre b, B, C, D et leurs dérivées soit remplie. Les équations $(\mathcal{C})$ qui répondent à cette condition se partagent en quatre classes, dont la première est constituée par les équations *linéaires (non homogènes) du second ordre*, et dont les trois autres présentent le même degré de généralité que la première, et par suite dépendent aussi de trois *fonctions arbitraires de x* .

Les équations de ces quatre classes sont réductibles respectivement [par une transformation (44)] à un des quatre types :

$$y'' = 0, \quad y'' = 6y^2, \quad y'' = 6y^2 + \frac{1}{2}, \quad y'' = 6y^2 + x.$$

Laissons de côté la première classe (équations linéaires). L'intégrale générale d'une équation de la seconde classe est de la forme

$$(45) \quad y = \lambda(x)p(X, 0, h) + \mu(x),$$

avec

$$\lambda = e^{\int \psi(x) dx}, \quad X = \int \chi(x) \lambda^{\frac{1}{2}}(x) dx,$$

μ , ψ et χ étant algébriques en x . Si l'équation est de la troisième classe, son intégrale est encore de la forme (45), mais λ et μ sont algébriques en x , et X est donné par une quadrature. Enfin, si l'équation est de la quatrième classe, elle est réductible, par une transformation algébrique (44), à l'équation

$$(F) \quad y'' = 6y^2 + x.$$

L'intégrale de cette dernière équation est une transcendante méromorphe essentiellement nouvelle : cette transcendante se laisse mettre sous la forme

$$y = \frac{\zeta'^2 - \zeta \zeta''}{\zeta^2},$$

où $\zeta(x)$ est une fonction ENTIÈRE essentiellement nouvelle définie par le système du troisième ordre

$$\frac{\zeta'}{\zeta} = \eta, \quad \frac{\eta'^2}{2} + 2\eta'^3 + x\eta' - \eta = 0.$$

La fonction $y(x)$ est, par suite, représentable par le quotient de deux fonctions entières en x , x_0 , y_0 , y'_0 , dont le développement peut être poursuivi indéfiniment à l'aide de simples dérivations.

L'expression de y , y' en y_0 , y'_0 définit une correspondance essentiellement biuniforme entre les couples de variables (y, y') et (y_0, y'_0) .

Il resterait à approfondir l'étude des transcendentes nouvelles $y(x)$ et $\zeta(x)$ au point de vue du genre, de la croissance pour $x = \infty$, de la distribution des zéros, etc.

Cette étude, où les travaux bien connus de M. Hadamard et de M. Borel doivent jouer un rôle important, sera développée dans la Monographie que je consacrerai à chacun des trois types nouveaux de transcendentes méromorphes qu'engendrent les équations (E) (voir le n° 3). Je me borne ici à signaler cette proposition :

Si $y(x)$ est une intégrale particulière de (F), l'équation $y(x) = A$ possède une infinité de racines quelle que soit la valeur (finie ou infinie) de A . La fréquence des racines pour $x = \infty$ est la même quel que soit A .

33. Les développements qui précèdent suffisent à faire comprendre nettement la double méthode que j'emploie pour déterminer les équations différentielles à points critiques fixes. Cette double méthode [recherche des conditions nécessaires pour que les points critiques soient fixes (n^{os} 6-16), discussion de la suffisance des conditions (n^{os} 17-23)], je l'ai exposée ici en détail en me restreignant aux équations (C); mais elle s'applique d'elle-même à toutes les équations du second ordre.

Quand on passe aux équations d'ordre supérieur, la première partie de la méthode (recherche des conditions nécessaires) s'étend bien aisément, au lieu que la seconde partie soulève des difficultés croissantes. Pour montrer combien est facile et fécond l'emploi de la première méthode, je terminerai ce Mémoire par une application aux équations du troisième ordre.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU TROISIÈME ORDRE.

34. Considérons une équation différentielle

$$(46) \quad y''' = R(x, y, y', y''),$$

où R est *rationnel* en y'', y' , *algébrique* en y, x , et cherchons à former des conditions nécessaires pour que cette équation ait ses points critiques fixes.

Tout d'abord les premières conditions du n^o 7 montrent que R doit être un polynome en y'' du second degré au plus ⁽¹⁾. Il suffit, pour le voir, de poser $y' = z$, $z' = u$ et d'étudier l'équation (46) dans le voisinage d'un pôle $u = g(x, y, z)$ de R ; puis de poser $y'' = \frac{1}{v}$, et d'étudier l'équation dans le domaine de $v = 0$.

Soit donc

$$(47) \quad y''' = y'^2 L(y', y, x) + y'' M(y', y, x) + N(y', y, x).$$

⁽¹⁾ Ce résultat est bien connu. Voir, par exemple, mes *Leçons de Stockholm*, p. 430-431.

Pour poursuivre l'étude de l'équation dans le domaine de $y'' = \infty$, je pose

$$x = x_0 + \alpha X, \quad y = y_0 + \alpha Y.$$

L'équation (47) devient

$$y''' = y''^2 L(y', y_0, x_0) + \alpha(\dots).$$

Il faut donc que l'équation

$$z'' = z'^2 L(z, y_0, x_0)$$

ait son intégrale uniforme, ce qui exige que $L(z)$ coïncide avec une des expressions du Tableau T (n° 10) où l'on a remplacé y par z et où les lettres $a, b, \dots$ représentent des fonctions de x, y . Il faut ensuite que $z(x)$ soit la dérivée d'une fonction uniforme et, en conséquence, n'ait que des pôles multiples. Cette condition, comme on le voit aussitôt, n'est remplie que par les expressions suivantes du Tableau (T) :

$$(T_1) \left\{ \begin{array}{l} 0, \quad \frac{1}{y'+a}, \quad \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{y'+a} \quad (n \text{ entier positif ou négatif, mais } \neq \pm 1), \\ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{y'+a} + \frac{1}{y'+b} \right), \quad \frac{1}{y'+a} + \frac{1}{2(y'+b)}, \\ \frac{1}{2(y'+a)} + \frac{2}{3(y'+b)}, \quad \frac{1}{2(y'+a)} + \frac{3}{4(y'+b)}, \\ \frac{1}{2(y'+a)} + \frac{5}{6(y'+b)}, \quad \frac{2}{3} \left(\frac{1}{y'+a} + \frac{1}{y'+b} \right), \\ \frac{2}{3(y'+a)} + \frac{5}{6(y'+b)}, \quad \frac{3}{4} \left(\frac{1}{y'+a} + \frac{1}{y'+b} \right), \\ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{y'+a} + \frac{1}{y'+b} + \frac{1}{y'+c} \right) \end{array} \right.$$

(a, b, c fonctions de y, x).

La fonction $L(y', y, x)$ doit donc coïncider avec une des expressions (T_1) .

33. Je dis maintenant que tout pôle $y' = g(y, x)$ des fractions rationnelles M et N en y' est pôle d'ordre 1 au plus et coïncide avec un des pôles de L .

Substituons, en effet, à l'équation (47) le système

$$(48) \quad \frac{dy}{dx} = z + g(y, x), \quad \frac{d^2 z}{dx^2} = L_1 z'^2 + M_1 z' + N_1;$$

si $y' = g$ est un pôle de L, M, N , la valeur $z = 0$ est un pôle de L_1, M_1, N_1 et nous pouvons écrire

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = [a(y, x) + z(\dots)] \frac{z'^2}{z} + [b(y, x) + z(\dots)] \frac{z'}{z^j} + \frac{c(y, x) + z(\dots)}{z^k},$$

$$[bc \neq 0];$$

la quantité a est égale, d'après ce qui précède, soit à zéro, soit à 1, soit à $1 - \frac{1}{n}$; les entiers j, k peuvent être nuls ou négatifs; mais si j et $k \leq 0$, la quantité a est différente de zéro.

Le changement de variables

$$x = x_0 + \alpha' X, \quad y = y_0 + \alpha' Y, \quad z = \alpha Z$$

$$\left(r = \text{la plus grande des deux quantités } j \text{ et } \frac{1+k}{2} \right)$$

donne au système (48) la forme

$$(49) \quad \frac{dy}{dx} = -g_0 + \alpha(\dots), \quad \frac{d^2 z}{dx^2} \begin{cases} = a_0 \frac{z'^2}{z} + b_0 \frac{z'}{z^j} + \alpha(\dots), & \text{si } j > \frac{1+k}{2}, \\ = a_0 \frac{z'^2}{z} + \frac{c_0}{z^k} + \alpha^{\frac{1}{2}}(\dots), & \text{si } j < \frac{1+k}{2}, \\ = a_0 \frac{z'^2}{z} + \frac{b_0 z'}{z^j} + \frac{c_0}{z^{2j-1}} + \alpha(\dots), & \text{si } j = \frac{1+k}{2} \end{cases}$$

$$[g_0 \equiv g(y_0, x_0), \quad a_0 \equiv a, \quad b_0 \equiv b(y_0, x_0), \quad c_0 \equiv c(y_0, x_0)].$$

Pour $\alpha = 0$, la seconde équation doit avoir son intégrale uniforme. Mais d'après la discussion du n° 11, cela n'est possible que si l'on a

$$r \leq 1, \quad a_0 \neq 0.$$

Si l'on revient aux fonctions L, M, N , il est dès lors évident que tout pôle $y' = g$ de ces fonctions est simple et pôle de L .

C. Q. F. D.

36. Je dis de plus que, pour $y' = \infty$, les expressions $\frac{M}{y'}, \frac{N}{y'^2}$ restent finies.

Tout d'abord, pour $y' = \infty$, L est de la forme

$$\frac{1}{y'} [a + \dots] \quad \left(a = 0 \quad \text{ou } 1 \quad \text{ou } 1 - \frac{1}{n} \right).$$

Soient maintenant p et q les ordres d'infinitude de M et N pour $y' = \infty$ (p et q peuvent être nuls ou négatifs).

Posons

$$y' = \frac{1}{z};$$

l'équation (47) devient

$$(50) \quad \begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{z}, \\ \frac{d^2 z}{dx^2} = (2 - \alpha) \frac{z'^2}{z} [1 + z(\dots)] + \frac{b(y, x) + z(\dots)}{z^p} z' + \frac{c(y, z) + z(\dots)}{z^{q-2}}. \end{cases}$$

Posons

$$x = x_0 + \alpha^r X, \quad y = y_0 + \alpha^{r-1} Y, \quad z = \alpha Z$$

$$\left(r = \text{la plus grande des quantités } p, \frac{q-1}{2} \right);$$

il vient

$$(51) \quad \frac{dv}{dx} = \frac{1}{z}, \quad \frac{d^2 z}{dx^2} = \begin{cases} = (2 - \alpha_0) \frac{z'^2}{z} + b_0 \frac{z'}{z^p} + \alpha(\dots), & \text{si } p > \frac{q-1}{2}, \\ = (2 - \alpha_0) \frac{z'^2}{z} + \frac{c_0}{z^{q-2}} + \alpha^{\frac{1}{2}}(\dots), & \text{si } p < \frac{q-1}{2}, \\ = (2 - \alpha_0) \frac{z'^2}{z} + \frac{b_0 z'}{z^p} + \frac{c_0}{z^{(2p-1)}} + \alpha(\dots), & \text{si } p = \frac{q-1}{2}. \end{cases}$$

Mais la seconde équation (51) ne peut avoir son intégrale uniforme (pour $\alpha = 0$), que si l'on a

$$r \leq 1,$$

c'est-à-dire

$$p \leq 1, \quad q \leq 3. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Les deux théorèmes qui précèdent LIMITENT LE DEGRÉ DE L , M , N EN y' . Si l'on pose

$$L = \frac{\lambda}{D}, \quad M = \frac{\mu}{D}, \quad N = \frac{\nu}{D},$$

λ , μ , ν , D désignant des polynomes en y' sans facteurs communs, toutes les formes possibles de $\frac{\lambda}{D}$ en y' sont connues; le degré de D en y' est au plus égal à 3, et les degrés de μ , ν dépassent au plus d'une et de trois unités respectivement le degré de D . Cette limi-

tation est entièrement analogue à la limitation, dans le cas du second ordre, du degré de l'équation en y (voir n° 12).

37. Mais les conditions nécessaires que fournit la méthode sont bien loin d'être épuisées. Il faut notamment que, pour $\alpha = 0$, les équations (49) et les équations (51) (où l'entier r est égal à 1) aient leur intégrale uniforme. J'insisterai seulement sur cette dernière condition.

Écrivons l'équation (47) sous la forme

$$y''' = \frac{y'^2}{y'} [a(y, x) + \varepsilon] + y'' y' [b(y, x) + \varepsilon_1] + y'^3 [c(y, x) + \varepsilon_2],$$

$\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ tendant vers zéro avec $\frac{1}{y'}$, et faisons le changement de variables : $x = x_0 + \alpha X$. L'équation devient

$$y''' = \frac{y'^2}{y'} a(y, x_0) + y'' y' b(y, x_0) + y'^3 c(y, x_0) + \alpha(\dots).$$

Convenons d'appeler SIMPLIFIÉE de l'équation (47), l'équation

$$(52) \quad y''' = \frac{y'^2}{y'} a(y, x_0) + y'' y' b(y, x_0) + y'^3 c(y, x_0)$$

(x_0 désignant une valeur numérique quelconque). Cette équation [qui équivaut au système (51) où l'on annule α], doit avoir son intégrale uniforme.

Cette équation (52) ne change pas dans la transformation

$$x = \alpha X + \beta.$$

Il suit de là que l'expression $v = \frac{\left(\frac{d^2 x}{dy^2}\right)}{\left(\frac{dx}{dy}\right)}$ doit vérifier une équation

du premier ordre, qu'on forme aussitôt. On trouve

$$\frac{dv}{dy} = v^2(v - a) + vb - c.$$

La quantité a est égale à $\left(1 - \frac{1}{n}\right)$, n désignant un entier positif, négatif ou infini, mais différent de -1 . En remplaçant v par



— $\frac{n}{n+1} w$, on ramène l'équation de Riccati à la forme

$$\frac{dw}{dy} + aw^2 - wb - \frac{n+1}{n} c = 0.$$

En définitive, l'équation (52) équivaut au système

$$(53) \quad \frac{dx}{dy} = u^{\frac{-n}{n+1}}, \quad \frac{d^2 u}{dy^2} = b(y) \frac{du}{dy} + \left(1 + \frac{1}{n}\right) c(y) u.$$

Un problème préliminaire s'impose donc :

Déterminer tous les cas où les fonctions $y(x)$ définies par le système (53) sont uniformes.

Pour $n = -2$ et $b = 0$, les fonctions uniformes $y(x)$ définies par le système (53) constituent la classe des fonctions *automorphes* (*fuchsiennes et kleinéennes*).

La résolution du problème préliminaire que je viens d'énoncer n'est pas sans présenter des difficultés assez sérieuses. Je me borne ici à énoncer le résultat général auquel je suis parvenu : *Quand les fonctions $y(x)$ définies par un système (53) sont uniformes, ce sont ou des fonctions automorphes ou des combinaisons de dégénérescence de fonctions automorphes (combinaisons telles que $y = e^{\sigma}$, etc.).*

38. Le seul exemple des équations fuchsiennes [équations (53) où $n = -2$ et $b = 0$] suffit à montrer qu'à l'inverse de ce qui se passe pour le second ordre, les équations (47) à points critiques fixes ne sont pas réductibles à un nombre fini de types dépendant d'un nombre fini de fonctions et de constantes. De plus, l'intégrale d'une équation (47) peut être une transcendante uniforme nouvelle *non méromorphe* : elle peut présenter des singularités essentielles mobiles [c'est ce qui aura lieu sûrement si l'intégrale $y(x)$ de la *simplifiée* (52) n'est pas méromorphe]; ces singularités peuvent former des ensembles parfaits (et notamment des lignes); et cette circonstance se présentera sûrement si elle se présente pour la *simplifiée* (52).

Sans avoir approfondi encore dans tous leurs détails les relations qui existent entre une équation (47) à points critiques fixes et sa simplifiée (52), j'ai pu constater que, plus les singularités

de l'équation (52) sont compliquées, plus l'intégrale de (47) se déduit aisément de l'intégrale de (52). Quand l'intégrale de (52) présente des ensembles parfaits de singularités, il me paraît vraisemblable que l'intégrale de (47) se déduit *par quadratures* de l'intégrale de (52). Comme je viens de le dire, il est évident que, dans ce cas, l'intégrale de (47) présente aussi des ensembles parfaits de singularités; mais il y a lieu de présumer que la réciproque est vraie.

Je n'insisterai pas davantage sur ces derniers résultats dont je ne possède pas encore de démonstration rigoureuse. Les résultats acquis suffisent à montrer qu'une partie au moins des plus grosses difficultés qu'entraîne l'élévation de l'ordre différentiel se trouvent dès maintenant surmontées par les travaux de M. Poincaré sur les fonctions automorphes.

39. *Équations différentielles d'ordre quelconque.* — Toutes les propositions qui précèdent ont leurs analogues dans l'étude des équations différentielles algébriques du troisième ordre ou d'ordre plus élevé. Bornons-nous, pour terminer, à considérer les équations d'ordre q

$$(54) \quad \frac{d^q y}{dx^q} = R \left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{q-2}y}{dx^{q-2}}, \frac{d^{q-1}y}{dx^{q-1}} \right)$$

où R est une fraction *rationnelle* en $\frac{d^{q-1}y}{dx^{q-1}}, \frac{d^{q-2}y}{dx^{q-2}}, \dots, \frac{dy}{dx}, y, x$.

Cherchons à mettre en évidence les conditions les plus simples qui sont nécessairement remplies quand l'équation (54) a ses points critiques fixes.

Écrivons l'équation ainsi :

$$(55) \quad \frac{d^{q-2}y}{dx^{q-2}} = u, \quad \frac{d^2u}{dx^2} = R(x, y, y', \dots, y^{(q-2)}, u, u').$$

1° R doit être un polynôme en u' du second degré au plus, résultat connu qu'on retrouve comme plus haut. Soit donc

$$R \equiv Lu'^2 + Mu' + N.$$

(L, M, N rationnels en u , algébriques en $y^{(q-2)}, \dots, y', y, x$).

2° L doit coïncider avec une des expressions

$$\frac{1 - \frac{1}{n}}{u+a}, \quad \frac{1}{u+a}, \quad \frac{1}{2} \left(\frac{2}{u+a} + \frac{1}{u+b} \right) \quad (n \text{ entier } + \text{ ou } < 2 - q),$$

expressions auxquelles il faut joindre

$$\frac{1}{2(u+a)} + \frac{2}{3} \frac{1}{u+b} \quad \text{pour } q \leq 7,$$

$$\frac{1}{2(u+a)} + \frac{3}{4(u+b)} \quad \text{pour } q \leq 5,$$

$$\frac{1}{2(u+a)} + \frac{5}{6(u+b)}, \quad \frac{2}{3} \left(\frac{1}{u+a} + \frac{1}{u+b} \right) \quad \text{pour } q = 4$$

(a, b fonctions algébriques de $y_{q-3}, \dots, y_1, y, x$).

Il suffit, pour le démontrer, de raisonner comme au n° 34, et d'effectuer, dans l'équation (54), la transformation

$$x = x_0 + \alpha X, \quad y = y_0 + \frac{y'_0}{1!} (x - x_0) + \dots + \frac{y_0^{(q-3)}}{(q-3)!} (x - x_0)^{q-3} + \alpha^{q-2} Y.$$

En faisant $\alpha = 0$, on voit que le système

$$\frac{d^{q-2}y}{dx^{q-2}} = u, \quad \frac{d^2u}{dx^2} = u'^2 L(u, y_0^{(q-3)}, \dots, y'_0, y_0, x_0)$$

doit avoir son intégrale uniforme. Ce qui exige que L coïncide avec une des expressions énumérées.

3° Tout pôle $u = g(y^{(q-3)}, \dots, y', y, x)$ de L, M, N est pôle du premier ordre au plus, et sûrement pôle de L. De plus, les expressions $\frac{M}{u}, \frac{N}{u^2}$ sont finies pour $u = \infty$.

On le voit en raisonnant comme aux n°s 35 et 36.

On substitue à l'équation (54) le système

$$\frac{d^{q-2}y}{dx^{q-2}} = z + g, \quad z'' = \frac{z'^2}{z} [a + z(\dots)] + \frac{z'}{zf} [b + z(\dots)] + \frac{c + z(\dots)}{z^k} \quad (1).$$

(1) Pour $u = \infty$, on remplace la première équation par

$$\frac{d^{q-2}y}{dx^{q-2}} = \frac{1}{z}.$$

et l'on emploie la transformation

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \alpha X, & z &= \alpha^{\frac{1}{r}} Z, \\ y &= y_0 + \frac{y'_0}{1!} (x - x_0) + \dots + \frac{y_0^{(q-3)}}{(q-3)!} (x - x_0)^{q-3} + \alpha^{q-2} Y, \end{aligned}$$

r désignant le plus grand des deux nombres $j, \frac{1+k}{2}$ ⁽¹⁾.

LE DEGRÉ DE L, M, N EN u SE TROUVE DÈS LORS LIMITÉ.

4° Écrivons l'équation (54) ainsi :

$$(56) \quad \frac{d^{q-3}y}{dx^{q-3}} = t, \quad \frac{d^3t}{dx^3} = \frac{t''^2}{t'} [a(t) + \varepsilon] + t'' t' [b(t) + \varepsilon_1] + t'^3 [c(t) + \varepsilon_2],$$

a, b, c étant indépendants de t'', t' , algébriques en t et en $y^{(q-1)}, \dots, y', y, x$, et les quantités $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ (indépendantes de t'') tendant vers zéro avec $\frac{1}{t'}$. Représentons par $a_0(t), b_0(t), c_0(t)$ ce que deviennent a, b, c , quand on y donne à $y^{(q-1)}, \dots, y', y, x$ des valeurs numériques. Convenons enfin d'appeler *SIMPLIFIÉE* de (54) l'équation

$$(57) \quad t''' = a_0(t) \frac{t''^2}{t'} + b_0(t) t'' t' + c_0(t) t'^3, \quad \text{où } t = \frac{d^{q-3}y}{dx^{q-3}}.$$

Si l'équation (54) a ses points critiques fixes, la simplifiée (57) a son intégrale uniforme. On le voit (comme au n° 37) en introduisant dans (54) la transformation

$$x = x_0 + \alpha X, \quad y = y_0 + \frac{y'_0}{1!} (x - x_0) + \dots + \frac{y_0^{(q-1)}}{(q-1)!} (x - x_0)^{q-1} + \alpha^{q-2} Y,$$

puis en faisant $\alpha = 0$.

L'équation (57) équivaut à un système (53), à savoir le système

$$(58) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = v^{-\frac{n}{n+1}}, & \frac{d^2v}{dt^2} = b_0(t) \frac{dv}{dt} + \left(1 + \frac{1}{n}\right) c_0(t) v \\ (n = \text{entier} + \text{ou} < 2 - q \text{ ou } n = \infty), \end{cases}$$

⁽¹⁾ Pour $u = \infty$, on remplace, dans la dernière égalité, $\alpha^{q-2}Y$ par $\alpha^{q-2-\frac{1}{r}}Y$.

suivi des quadratures définies par l'égalité

$$\frac{d^{q-3}y}{dx^{q-3}} = t(x).$$

Il faut d'abord que chaque fonction $t(x)$ définie par (58) soit uniforme; il faut de plus qu'elle soit la dérivée $(q-3)^{\text{ième}}$ d'une fonction uniforme.

Ce ne sont là que les premières et les plus simples des conditions nécessaires qui découlent de la méthode. Mais, sans qu'il soit nécessaire de les pousser plus loin, elles mettent en évidence l'importance primordiale que présente, dans l'étude systématique des équations différentielles à intégrale générale uniforme, la théorie des transcendentes uniformes $t(x)$ engendrées par un système (58) et par conséquent des transcendentes fuchsiennes.

PROPRIÉTÉ CARACTÉRISTIQUE DU CYLINDROÏDE;

Par M. PAUL APPELL.

On sait que Sir Robert Ball a introduit, à propos de la composition des forces appliquées à un solide, un certain conoïde droit appelé *cylindroïde*; il a montré que cette surface réglée partage, avec les cylindres, la propriété que *le lieu des projections d'un point quelconque de l'espace sur les génératrices est une courbe plane*. On trouvera un résumé des travaux de Sir Robert Ball à la fin du Mémoire intitulé : *The twelfth and concluding Memoir on the theory of screws*, by Sir Robert Ball (*Transactions of the Royal Irish Academy*, vol. XXXI, 1898).

Après avoir établi que le cylindroïde est le seul conoïde droit possédant cette propriété ⁽¹⁾, j'ai été conduit à penser que c'est, en dehors des cylindres, la seule surface réglée qui la possède. Dans une lettre qu'il m'a adressée en 1899 Sir Robert Ball donne également cette propriété comme très vraisemblable. Je ne sais s'il en a publié une démonstration; en voici une d'un caractère tout à fait élémentaire :

(1) *Revue de Mathématiques spéciales*, juin 1895 (Nony).

1. Je m'appuierai d'abord sur la proposition suivante : Soient trois plans P_1, P_2, P_3 passant par une même droite D et une droite mobile G rencontrant ces plans respectivement en trois points M_1, M_2, M_3 tels que le rapport $\frac{M_1 M_2}{M_1 M_3}$ soit constant : alors, *si la droite ne rencontre pas D (cas où le rapport est indéterminé), elle reste parallèle à un plan fixe parallèle à D .*

En effet, on voit facilement par la Géométrie élémentaire que la projection de la droite G sur un plan perpendiculaire aux trois plans fixes se déplace parallèlement à elle-même.

2. Imaginons maintenant une surface réglée telle que le lieu des projections d'un point quelconque A de l'espace sur ses génératrices soit une courbe située dans un plan P ; nous dirons, pour abrégé, que ce plan P correspond au point A . Nous montrerons d'abord qu'il est absurde de supposer que les génératrices de la surface ne sont pas parallèles à un même plan. En effet, supposons une droite G qui se déplace *sans rester parallèle à un plan fixe* : soient G_1, G_2, G' trois positions déterminées de cette droite non parallèles à un même plan. Nous allons montrer que, si la surface possède la propriété indiquée, ses génératrices rencontrent toutes une droite fixe *quelconque* s'appuyant sur G_1 et G_2 . Prenons sur G_1 et G_2 deux points fixes F_1 et F_2 choisis de telle façon que la droite $F_1 F_2$ ne rencontre pas G' . Cela est évidemment possible, car les génératrices G_1, G_2, G' , étant supposées non parallèles à un même plan, ne sont pas dans un même plan. Menons par les points F_1 et F_2 des plans perpendiculaires à G_1 et G_2 ; ces plans se coupent suivant une droite Δ . Prenons maintenant sur G' trois points fixes H_1, H_2, H_3 et menons par ces trois points des plans perpendiculaires à G' ; ces plans couperont Δ en trois points A_1, A_2, A_3 . Par hypothèse, le lieu des projections du point A , sur toutes les génératrices est situé dans un plan P ; ce plan est le plan $F_1 F_2 H_1$, car F_1, F_2 et H_1 sont les projections de A , sur les génératrices spéciales G_1, G_2, G' . De même les plans P_2 et P_3 correspondant à A_2 et A_3 sont les plans $F_1 F_2 H_2, F_1 F_2 H_3$; ces trois plans *passent par une même droite D , la droite $F_1 F_2$.*

Prenons maintenant une génératrice variable G se déplaçant d'une manière continue; cette droite rencontre les plans P_1, P_2, P_3 en trois points M_1, M_2, M_3 qui, par hypothèse, sont les projections

des points A_1, A_2, A_3 sur G ; quand cette droite varie, le rapport

$$\frac{M_1 M_2}{M_1 M_3}$$

reste constant comme égal à $\frac{A_1 A_2}{A_1 A_3}$, car les points A_1, A_2, A_3 sont en ligne droite. Alors, d'après le lemme 1, ou bien la droite G rencontre la droite $D(F, F_2)$, ou bien elle est parallèle à un plan fixe. Mais comme nous écartons cette dernière hypothèse, la droite mobile G rencontre la droite fixe F, F_2 .

Ainsi, en prenant deux génératrices G_1 et G_2 , toute autre génératrice G devrait rencontrer toute droite F, F_2 s'appuyant sur G_1 et G_2 ; ceci est impossible si la surface ne se réduit pas à un plan.

3. D'après ce qui précède, les génératrices sont nécessairement parallèles à un plan directeur. Nous écartons le cas où elles seraient parallèles à une directrice fixe (cas du cylindre), et nous allons montrer que ces génératrices rencontrent nécessairement une droite fixe perpendiculaire au plan directeur, de façon à former un conoïde droit.

Soient G_1 et G_2 deux génératrices fixes non parallèles, A, A_2 la perpendiculaire commune à ces deux génératrices, droite qui est perpendiculaire au plan directeur. Nous allons montrer que les génératrices rencontrent toutes la droite A, A_2 . Prenons, en effet, une génératrice variable G : cette droite, étant parallèle au plan directeur, se déplace en restant perpendiculaire à A, A_2 . Soit A un point fixe pris sur la droite A, A_2 : par hypothèse, le lieu de la projection M du point A sur la génératrice G est dans un plan P ; mais les points A_1 et A_2 appartenant au lieu, le plan P passe par la droite A, A_2 .

Dès lors, si le point M ne se trouve pas sur A, A_2 , la droite G est perpendiculaire au plan fixe P , car elle est perpendiculaire aux deux droites AM et A, A_2 de ce plan : la droite G étant perpendiculaire à un plan fixe aurait une direction fixe, ce qui est contraire à l'hypothèse. Il faut donc que la génératrice G rencontre A, A_2 , et la surface est un *conoïde droit*. Il est alors aisé de voir que c'est un cylindroïde; c'est ce que nous montrerons en reproduisant la démonstration que nous avons donnée dans la *Revue de Mathématiques spéciales* en juin 1895.

4. Trouver un conoïde droit tel que le lieu des projections d'un point quelconque sur ses génératrices soit une courbe plane.

Prenons pour axe Oz la directrice rectiligne du conoïde et pour plan xOy le plan directeur, supposé perpendiculaire à Oz . Les équations d'une génératrice peuvent s'écrire

$$y = mx, \quad z = \varphi(m),$$

ou encore, en désignant par $\psi(m)$ une fonction convenablement choisie,

$$(1) \quad y = mx, \quad z = \frac{\psi(m)}{1+m^2},$$

Prenons un point quelconque (α, β, γ) de l'espace : le plan projetant ce point sur la génératrice est

$$(2) \quad x - \alpha + m(y - \beta) = 0.$$

Les coordonnées de la projection du point α, β, γ sur la génératrice s'obtiennent en résolvant les équations (1) et (2)

$$(3) \quad x = \frac{\alpha + m\beta}{1+m^2}, \quad y = m \frac{\alpha + m\beta}{1+m^2}, \quad z = \frac{\psi(m)}{1+m^2}.$$

Quel que soit m , ce point doit être dans un plan

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

dont les coefficients sont fonctions de α, β, γ . On a donc

$$(4) \quad A + mB(\alpha + m\beta) + C\psi(m) + D(1+m^2) = 0.$$

Cette relation doit avoir lieu *identiquement* quels que soient α, β, γ et m ; donc, en donnant à α, β, γ des valeurs constantes, d'ailleurs arbitraires, on voit que $\psi(m)$ est nécessairement, d'après (4), une fonction du second degré de m ,

$$\psi(m) = am^2 + bm + c,$$

a, b, c désignant des constantes. D'ailleurs cette forme nécessaire de $\psi(m)$ est suffisante, comme nous allons le vérifier en montrant que le conoïde défini par

$$y = mx, \quad z = \frac{am^2 + bm + c}{1+m^2}$$

possède la propriété demandée. Ce conoïde a pour équation

$$z = \frac{ay^2 + bxy + cx^2}{x^2 + y^2}.$$

On peut simplifier cette équation de la façon suivante : Transportons d'abord l'origine en un point O' , $z = \lambda$, de l'axe des z . Nous aurons $z = \lambda + z'$ et la nouvelle équation sera

$$z' = \frac{(a - \lambda)y^2 + bxy + (c - \lambda)x^2}{x^2 + y^2}.$$

On peut déterminer λ de façon que la forme quadratique du numérateur, égale à zéro, représente deux droites rectangulaires $O'x'$ et $O'y'$: il suffit de faire

$$a + c - 2\lambda = 0.$$

La constante λ étant ainsi déterminée, on peut prendre pour nouveaux axes des x' et des y' ces deux droites $O'x'$ et $O'y'$: l'équation prend alors la forme

$$z' = \frac{2kx'y'}{x'^2 + y'^2},$$

k désignant une constante. C'est là, sous sa forme la plus simple, l'équation du *cylindroïde*.

La propriété caractéristique est alors aisée à vérifier.

5. Quand on veut aborder le problème directement par voie analytique, les calculs paraissent compliqués. On pourrait, comme point de départ, étudier la surface suivante :

Étant donnés trois points fixes A_1, A_2, A_3 et trois plans fixes P_1, P_2, P_3 , trouver le lieu d'une droite G telle que les projections des points A_1, A_2, A_3 sur cette droite soient respectivement dans les plans P_1, P_2, P_3 .

SUR PLUSIEURS GROUPES SIMPLES ;

Par M. G.-A. MILLER.

Mathieu a établi l'existence d'une fonction cinq fois transitive de 24 éléments ayant $19! : 48$ valeurs ⁽¹⁾. L'objet de cette Note est de prouver que *le groupe (G^{21}) de cette fonction et chacun de ses sous-groupes maxima de degrés 21, 22, 23 (G^{21} , G^{22} , G^{23}) sont des groupes simples.*

Le groupe G^{21} contient un sous-groupe intransitif d'ordre 48, les systèmes d'intransitivité étant 16 et 3; ce sous-groupe est composé de 32 substitutions de degré 18 et d'ordre 3, 15 substitutions de degré 16 et d'ordre 2 et de la substitution identique ⁽²⁾. Puisque ce groupe d'ordre 48 ne peut contenir plus de deux substitutions qui transforment en lui-même un sous-groupe d'ordre 5 et de degré 20, un sous-groupe maximum G^{20} , de degré 20, contenu dans G^{21} devra renfermer précisément 96 sous-groupes d'ordre 5 et 160 sous-groupes d'ordre 3. Il suit de là qu'aucun sous-groupe de G^{20} ne peut posséder toutes ses substitutions d'ordre 3 ou toutes ses substitutions d'ordre 5. Par conséquent G^{20} ne peut avoir d'autre sous-groupe invariant que la substitution identique et, peut-être, un sous-groupe d'ordre 16. Il existe effectivement un sous-groupe invariant d'ordre 16 et le groupe G^{20} est, par rapport à ce sous-groupe, isomorphe au groupe de l'icosaèdre; mais nous n'utiliserons pas ce fait dans notre démonstration.

Passons à la considération des sous-groupes de degré supérieur contenus dans G^{21} . Supposons que G^{21} contienne un sous-groupe invariant K ne se réduisant pas à la substitution identique. Puisque G^{21} est primitif, K doit être transitif; il doit donc contenir tous les sous-groupes d'ordre 7 de G^{21} . Le plus grand sous-groupe de G^{21} qui appartient à G^{20} est d'ailleurs un sous-groupe invariant de G^{20} ; nous concluons de là que K est d'ordre 21 ou d'ordre 16.21.

⁽¹⁾ *Journal de Liouville*, t. 18, p. 25; 1873. Mathieu déclare avoir trouvé cette fonction antérieurement; *Ibid.*, t. 6, p. 241; 1861. Cf aussi JORDAN, *Comptes rendus*, t. LXXIX, p. 1150.

⁽²⁾ *Journal de Liouville*, t. 18, p. 39; 1873.

Mais aucun de ces ordres n'est admissible, puisque G^{21} ne peut contenir plus de $6.6.7$ substitutions qui transforment l'un de ses sous-groupes d'ordre 7 en lui-même (le nombre effectif de ces substitutions est 21), ce qui exige qu'il renferme plus de 16.21 substitutions d'ordre 7. Il en résulte donc que G^{21} est simple.

Il est intéressant de faire observer que G^{21} est un groupe simple du même ordre que le groupe alterné de degré 8. Ces deux groupes ne peuvent être isomorphes, car G^{21} renferme un sous-groupe d'ordre 960, et le groupe alterné de degré 8 ne possède aucun sous-groupe de cet ordre ⁽¹⁾.

Supposons maintenant G^{22} composé, il contiendra un sous-groupe invariant régulier, puisque G^{21} est simple et transitif. Ce sous-groupe régulier devra renfermer toutes les substitutions d'ordre 11 appartenant à G^{22} , et, comme ceci est manifestement impossible, G^{22} est simple. Il est maintenant évident qu'il en sera de même de G^{23} ⁽²⁾.

Passons à l'examen de G^{24} . S'il est composé, il renfermera un sous-groupe invariant régulier; mais ceci est impossible, puisque chaque groupe d'ordre 24 contient au moins un sous-groupe caractéristique, la substitution identique ⁽³⁾. Le groupe G^{24} est donc simple.

Je ferai remarquer, en terminant, que la liste des groupes simples connus donnée par M. Dickson (*Bulletin of the American Mathematical Society*, juillet 1899) ne contient aucun groupe simple de même ordre que les groupes considérés G^{22} , G^{23} , G^{24} . Il y a, par conséquent, une erreur dans ma Note : *Sur la fonction cinq fois transitive de 24 éléments et de $19! : 48$ valeurs* (*Messenger of Mathematics*, avril 1898). Chacune des substitutions d'ordre 2 et de degré 16 qui y sont données est transformée en elle-même par 16 substitutions de G^{24} , qui ne change aucun de ses systèmes d'intransitivité, et non pas par 2 substitutions comme il est supposé dans le raisonnement, p. 190 de cette Note.

Cornell University, Février 1900.

⁽¹⁾ *American Journal of Mathematics*, vol. XXI, p. 335; 1899. Cf aussi *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. V, p. 235; 1899.

⁽²⁾ *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. XXI, p. 148; 1899.

⁽³⁾ *Quarterly Journal of Mathematics*, vol. XXVIII, p. 274; 1896.

COMPTES RENDUS. DES SÉANCES.

SÉANCE DU 4 JUILLET 1900.

PRÉSIDENTE DE M. ANDRÉ.

Communications :

M. Touche : *Sur les lignes triplement orthogonales autour d'un ellipsoïde de révolution.*

M. Leau : *Sur la possibilité d'une langue universelle.*

SÉANCE DU 18 JUILLET 1900.

PRÉSIDENTE DE M. TOUCHE.

M. DE MONTCHEUIL adresse la Note suivante :

Généralisation des formules de M. Schwarz relatives aux surfaces minima.

Soient données douze fonctions arbitraires d'une variable indépendante λ

$$x, y, z, u; \quad X, Y, Z, U; \quad X', Y', Z', U'$$

que nous écrirons $x_n, y_n, \dots$ quand on y fera $\lambda = \lambda_n$.

Soient données entre ces fonctions les relations suivantes :

$$\begin{aligned} X dx + Y dy + Z dz + U du &= 0, & X^2 + Y^2 + Z^2 &= 1, & U &= i, \\ X' dx + Y' dy + Z' dz + U' du &= 0, & X'^2 + Y'^2 + Z'^2 &= 1, & U' &= 0. \end{aligned}$$

Posons

$$(dy, Z, U') = D_x d\lambda$$

et désignons par $-D_y d\lambda, D_z d\lambda, -D_u d\lambda$ les déterminants qu'on déduit du premier par permutation des lettres $x, y, \dots, X, Y, \dots, X', Y', \dots$

Posons encore

$$\sqrt{\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2 + du^2}{D_x^2 + D_y^2 + D_z^2 + D_u^2}} = \lambda d\lambda.$$

Les formules proposées seront alors les suivantes :

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x_0 + x_1}{2} + \frac{i}{2} \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \mu D_x d\lambda, \\ y' &= \frac{y_0 + y_1}{2} + \frac{i}{2} \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \mu D_y d\lambda, \\ z' &= \frac{z_0 + z_1}{2} + \frac{i}{2} \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \mu D_z d\lambda, \\ u' &= \frac{u_0 + u_1}{2} + \frac{i}{2} \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \mu D_u d\lambda. \end{aligned}$$

Si l'on fait dans ces formules

$$u = 0; \quad X' = X; \quad Y' = Y; \quad Z' = Z,$$

on retrouve les formules de M. Schwarz relatives aux surfaces minima.

D'ailleurs on peut donner de ces formules l'interprétation suivante :

1° Les trois premières formules définissent les coordonnées d'une surface quelconque Σ engendrée par la translation d'une courbe de forme invariable, et passant par une courbe donnée de coordonnées x, y, z .

2° La surface Σ admet tout le long de la courbe donnée, un plan tangent de cosinus directeurs donnés X', Y', Z' .

3° La surface Σ est la développée moyenne d'une surface S , admettant un plan tangent de cosinus directeurs donnés X, Y, Z tout le long de la courbe, correspondant à la courbe donnée sur la surface Σ .

4° Tout le long de cette même courbe, la surface S admet une courbure donnée — iu .

5° La fonction — iu' définie par la quatrième formule, représente la courbure moyenne en un point quelconque de la surface S .

SÉANCE DU 21 JUILLET 1900.

PRÉSIDENCE DE M. BIOCHE.

La Société, réunie en Assemblée générale, adopte, à l'unanimité des suffrages exprimés, après quelques modifications de détail, les propositions qui ont été soumises aux différents membres dans la circulaire du 2 juillet 1900.

FIN DU TOME XXVIII.

Erratum du tome XXVIII.

Page 64, dans la formule qui donne y , permuter $\sin u$, et $\cos u$.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME XXVIII.

(Les lettres et numéros qui précèdent les titres indiquent les classifications
du *Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques*.)

État de la Société mathématique au commencement de 1900.....	Pages v
Liste des Présidents de la Société depuis sa fondation.....	xiv
Liste des Sociétés scientifiques et des Recueils périodiques avec lesquels la Société échange son <i>Bulletin</i>	xv

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

[O 4 h 3].	Appell. — Propriété caractéristique du cylindrotroisde.....	261
[A 4 d].	Autonne. — Sur certaines équations des quatrième et cinquième degrés.....	90
[D 1 a].	Baire. — Nouvelle démonstration d'un théorème sur les fonctions discontinues.....	173
[H 8].	Beudon. — Sur les changements de variable.....	107
[M' 5 k s].	Bricard. — Sur les propriétés métriques d'une certaine correspondance (1,1) entre cubiques focales.....	39
[R 2 b].	Caspary. — Sur le centre de gravité d'un quadrilatère...	143
[O 3 e].	Demoulin. — Sur la torsion d'une courbe définie par son plan osculateur.....	180
[M' 3 h].	Dumont. — Sur les surfaces cubiques ayant un axe de symétrie ternaire et sur les surfaces cubiques possédant des points à indicatrice du troisième ordre.....	117
[H g e].	Goursat. — Sur une transformation de l'équation $s^2 = 4\lambda(x, y) pq$	1
[H g e].	Hadamard. — Sur l'intégrale résiduelle.....	69
[I 9 c].	Landau. — Sur quelques problèmes relatifs à la distri- bution des nombres premiers.....	25
[C 2 g].	Le Roux. — Sur un invariant d'un système de deux triangles et la théorie des intégrales doubles.....	168
[J 4 d].	Mallet. — Sur les groupes échangeables et les groupes décomposables.....	7
[J 4 a 3].	Miller. — Sur plusieurs groupes simples.....	266

		Pages.
[140]	Ocagne (d'). — Problème de partition	157
[H 1 g] [D 4 c].	Painlevé. — Mémoire sur les équations différentielles dont l'intégrale générale est uniforme.....	201
[M ² 8 e].	Picard. — Sur une classe de surfaces algébriques dont les coordonnées s'expriment par des fonctions uniformes de deux paramètres	17
[H 9 d].	Picard. — Sur un exemple d'approximations successives divergentes	137
[F 8 h].	Sparre (de). — Sur une application des fonctions elliptiques.....	52
[I 23].	Störmer. — Sur une propriété arithmétique des logarithmes des nombres algébriques.....	146

COMPTES RENDUS DES SÉANCES

	Comptes rendus des séances.....	56, 121, 180 et	268
[H 11 c].	Andrade. — Sur l'équation fonctionnelle de Poisson..		58
[T 2].	Appell. — Note sur les expériences du commandant Hartmann.....		66
[D 2 b x].	Borel. — Sur le prolongement analytique de la série de Taylor.....		200
[B 1 a].	Ferber. — Applications du symbole des déterminants positifs.....		128
[H 1 a].	Hadamard. — Sur les intégrales d'un système d'équations différentielles ordinaires, considérées comme fonctions des données initiales.....		61
[O 6 h].	Montcheuil (de). — Généralisation des formules de M. Schwarz relatives aux surfaces minima.....		268
[H 1 a].	Painlevé. — De la détermination unique des intégrales d'un système d'équations différentielles ordinaires par les conditions initiales de Cauchy.....		191
[H 10 d].	Picard. — Sur quelques problèmes relatifs à l'équation $\Delta u = k^2 u$		180
[B 10 a].	Ripert. — Sur les propriétés générales des formes quadratiques.....		56
[L' 16 a].	Ripert. — Sur les triangles trihomologiques inscrits ou circonscrits à une conique.....		196
[S 2].	Touche. — Les équations de l'hydraulique données par Lagrange.....	121 et	135
[L' 1 a].	Tresse. — Sur les propriétés projectives des coniques.....		131
	Table des matières du Tome XXVIII.		271

FIN DE LA TABLE DU TOME XXVIII.

EXTRAIT DES STATUTS ET DU RÈGLEMENT.

La Société mathématique de France a pour objet l'avancement et la propagation des études de Mathématiques pures et appliquées. Elle y concourt par ses travaux et ses publications. Elle a son siège à Paris.

La Société se compose de sociétaires perpétuels, de membres résidents et de membres non résidents, en nombre illimité.

Sont considérés comme résidents les membres qui ont à Paris leur domicile ou leurs occupations professionnelles.

Les Étrangers peuvent faire partie de la Société.

Les conditions à remplir, pour être membre de la Société, sont les suivantes : 1° avoir été présenté par deux de ses membres et agréé par le Conseil d'administration ou par le Bureau agissant en vertu d'un mandat du Conseil; 2° avoir obtenu, à l'une des séances qui ont suivi la présentation, les suffrages de la majorité des membres présents; 3° avoir versé un droit d'admission de *dix francs*; 4° payer une cotisation annuelle dont le montant est de *vingt francs* pour les membres résidents, et de *quinze francs* pour les membres non résidents.

La cotisation annuelle peut toujours être rachetée par une somme de *trois cents francs*, versée dans les conditions fixées par le règlement administratif de la Société.

Ce versement confère le titre de *sociétaire perpétuel*.

La cotisation annuelle est payée au commencement de chaque exercice dont l'origine est fixée au 1^{er} novembre de chaque année.

Les nouveaux membres doivent payer la totalité de la cotisation de l'exercice en cours, quelle que soit l'époque de leur admission.

La Société tient des séances ordinaires deux fois par mois; elle prend trois mois de vacances, en août, septembre et octobre.

Pour assister aux séances, les personnes étrangères à la Société doivent être présentées par l'un de ses membres.

La Société publie par livraisons un Recueil annuel qui a pour titre : *Bulletin de la Société mathématique de France*, et qui contient, avec un extrait des procès-verbaux des séances, des Notes et Mémoires sur les Mathématiques pures ou appliquées, ayant pour auteurs des membres de la Société, et présentant quelque originalité au point de vue de la méthode ou des résultats.

Les livraisons du *Bulletin* sont adressées à tous les membres de la Société, au fur et à mesure de leur publication. Toutefois, dans le cas où un sociétaire se met en retard dans le payement de sa cotisation, l'envoi du *Bulletin* est suspendu pour lui, jusqu'à ce qu'il ait acquitté l'arriéré.

TABLE DES MATIÈRES

(FASCICULE 4).

Mémoires et Communications.

	Pages.
[H4g, D4c]. — Mémoire sur les équations différentielles dont l'intégrale générale est uniforme; par M. <i>Painlevé</i>	200
[O4h3]. — Propriété caractéristique du cylindroïde; par M. <i>P. Appell</i>	261
[J4a3]. — Sur plusieurs groupes simples; par M. <i>Miller</i>	266

Comptes rendus des Séances.

[O63]. — Généralisation des formules de Schwarz relatives aux surfaces minima; par M. <i>de Montcheuil</i>	268
Table des Matières du Tome XXVIII.....	276

MODIFICATIONS A LA LISTE DES MEMBRES DE LA SOCIÉTÉ

Date de l'admission.	
1899.	BOULANGER , Maître de Confé. à l'Université, rue Caumartin, 80, à Lille.
1900.	COMTE (Firmin). Ingénieur des Ponts et Chaussées, à Bar-le-Duc.
1895.	MAILLET , Docteur ès sciences. Répétiteur à l'École Polytechnique, rue de Fontenay, 11, Bourg-la-Reine.

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55 A PARIS.

BOREL (Émile), Maître de Conférences à l'École Normale supérieure. — **Leçons sur la théorie des fonctions**. Exposé des éléments de la théorie des ensembles avec des applications à la théorie des fonctions. Grand in-8; 1898..... 3 fr. 50 c.

BOREL (Émile), Maître de Conférences à l'École Normale supérieure. — **Leçons sur les fonctions entières** (Nouvelles Leçons sur la théorie des fonctions). Grand in-8; 1900..... 3 fr. 50 c.

DUPORCQ (Ernest), ancien Élève de l'École Polytechnique, Ingénieur des Télégraphes. — **Premiers principes de Géométrie moderne**, à l'usage des élèves de Mathématiques spéciales et des candidats à la Licence et à l'Agrégation. In-8, avec figures; 1899..... 3 fr.

OCAGNE (Maurice d'), Ingénieur des Ponts et Chaussées. Professeur à l'École des Ponts et Chaussées, Répétiteur à l'École Polytechnique. — **Traité de Nomographie. Théorie des abaques. Applications pratiques**. Grand in-8, avec 177 figures et 1 planche; 1899.

Broché..... 14 fr. | Relié (cuir souple).... 17 fr.

RAFFY (L.), Maître de Conférences à la Faculté des Sciences et à l'École Normale supérieure. — **Leçons sur les applications géométriques de l'Analyse. Éléments de la théorie des courbes et des surfaces**. Grand in-8, avec figures; 1897..... 7 fr. 50 c.

28162 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

Le Gérant : GAUTHIER-VILLARS.





